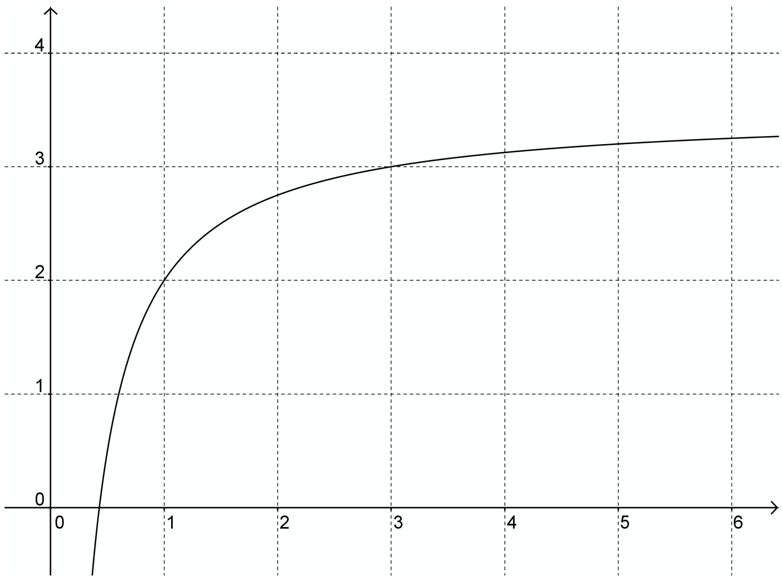
Suites : exercice d'entraînement

Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par son terme initial $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 3,5 - \dfrac{1,5}{u_n}$.

On a représenté ci-dessous le graphe de la fonction $f : x \mapsto 3,5 - \dfrac{1,5}{x}$, définie sur $]0;+\infty[$.



On admet que f est croissante sur $]0;+\infty[$.

1. (a) Dans le repère ci-dessus, construire sur l'axe (Ox) les points d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

   (b) Que peut-on conjecturer quant à la monotonie et la convergence de la suite (u_n) ?

2. En utilisant un raisonnement par récurrence :

   (a) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1;3]$.

   (b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. Que peut-on en conclure ?

3. On pose $w_n = 3 - u_n$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 0,5\,\dfrac{w_n}{u_n}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} \leqslant 0,5\, w_n$.

   (c) Grâce à un raisonnement par récurrence, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \leqslant 2 \times 0,5^n$.

   (d) Conclure quant à la convergence de la suite (w_n) puis quant à celle de la suite (u_n).