Exercice (probabilités)

D'après *Bac S, Asie, juin 2005, ex 2*

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.

Un joueur doit tirer successivement deux boules au hasard (sans remise) dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.

Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.

Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.

Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\dfrac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 €,
- sur $\dfrac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 €,
- sur le reste le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».

On appelle J l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».

On appelle P l'évènement « le joueur a perdu ».

On appelle R l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ».

1. Illustrer la situation grâce à un arbre pondéré.
2. Quelques calculs.
   (a) Calculer les probabilités $p(\mathrm{V})$, $p(\mathrm{J})$ et $p(\mathrm{P})$ des évènements respectifs V, J et P.
   (b) On note $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{R})$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{R})$ puis $p(\mathrm{R} \cap \mathrm{V})$.
   (c) Calculer $p(\mathrm{R})$.
   (d) On suppose que le joueur a été remboursé de sa participation ; quelle est alors la probabilité qu'il ait obtenu deux boules vertes ?
   (e) Calculer la probabilité de gagner les 100 €, puis la probabilité de gagner les 20 € de la roue.
3. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est- à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.
   (a) Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   (b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et vérifier que :
   $$p(X = -m) = 0,6 \ .$$
   (c) Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est :
   $$\mathrm{E}(X) = \frac{140 - 51m}{80} \ .$$

☞

(d) L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur en euros (précise au centime près). Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

4. On voudrait qu'un joueur ait au moins une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner, quand il joue une seule fois. On note G cet événement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle n le nombre de boules jaunes, on suppose $n \geqslant 1$. Calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée.