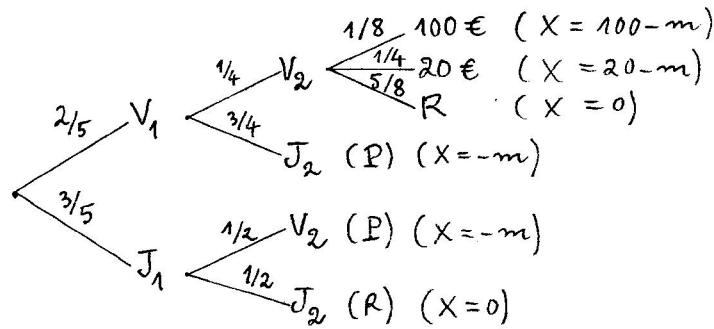


- 1) Notons V_1 (resp. J_1) l'événement « la première boule tirée est verte (resp. jaune) », et V_2 (resp. J_2) l'événement « la seconde boule tirée est verte (resp. jaune) ».



2) a) $V = V_1 \cap V_2$ donc $p(V) = p(V_1) \times p(V_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

$J = J_1 \cap J_2$ donc $p(J) = p(J_1) \times p(J_2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$.

On a $\bar{P} = J \cup V$ et J et V sont incompatibles donc $p(P) = 1 - p(\bar{P}) = 1 - p(J) - p(V)$, soit $p(P) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

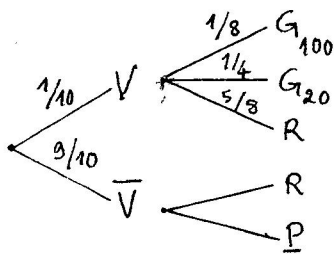
2) b) On a $p_V(R) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$, donc $p(V \cap R) = p(V) \times p_V(R) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$.

2) c) D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition $(V, \bar{V})$ de l'univers, on a $p(R) = p(V \cap R) + p(\bar{V} \cap R)$. Or $\bar{V} \cap R = J$ donc :

$$p(R) = p(V \cap R) + p(J) = \frac{1}{16} + \frac{3}{10} = \frac{5 + 24}{80} = \frac{29}{80}.$$

2) d) La probabilité cherchée est $p_R(V) = \frac{p(V \cap R)}{p(R)} = \frac{1/16}{29/80} = \frac{1}{16} \times \frac{80}{29} = \frac{5}{29}$.

2) e)



Notons G_{100} (resp. G_{20}) l'événement « le joueur a gagné 100 € (resp. 20 €) ».

On a $G_{100} = V \cap G_{100}$ et $G_{20} = V \cap G_{20}$, donc

$$p(G_{100}) = p(V) \times p_V(G_{100}) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{80}, \text{ et}$$

$$p(G_{20}) = p(V) \times p_V(G_{20}) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{40}.$$

3) a) X prend les valeurs $-m$, 0 , $20-m$ et $100-m$.

3) b) $p(X = -m) = p(P) = \frac{3}{5} = 0,6$

$X = \dots$	$-m$	0	$20-m$	$100-m$
$p(X = \dots)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{80}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{80}$

$p(X = 0) = p(R) = \frac{29}{80}$

$p(X = 20-m) = p(G_{20}) = \frac{1}{40}$ et $p(X = 100-m) = p(G_{100}) = \frac{1}{80}$

3) c) L'espérance de X vaut $E(X) = \frac{3}{5} \times (-m) + \frac{29}{80} \times 0 + \frac{1}{40} \times (20-m) + \frac{1}{80} \times (100-m)$,

soit $E(X) = \frac{-48m + 2(20-m) + 100-m}{80} = \frac{140 - 51m}{80}$.

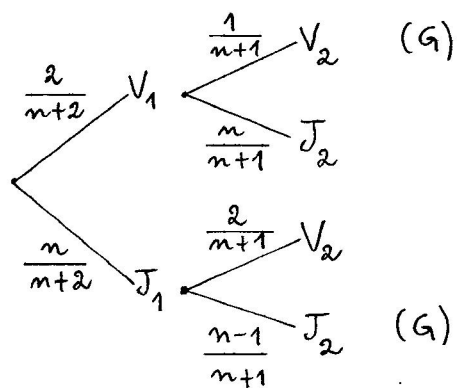
3) d) $E(X)$ est le gain moyen d'un joueur. La condition pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent est $E(X) \leq 0$, ce qui équivaut à



$$140 - 51n \leq 0 \Leftrightarrow 51n \geq 140 \Leftrightarrow n \geq \frac{140}{51} \quad (\approx 2,745) \quad (51 > 0)$$

Il faut donc que n soit fixé à au moins 2,75 €.

4) l'arbre suivant (qui généralise celui construit au 1.) modélise la situation:



On a $G = (V_1 \cap V_2) \cup (J_1 \cap J_2)$ avec $V_1 \cap V_2$ et $J_1 \cap J_2$ incompatibles,

$$\begin{aligned} \text{donc } p(G) &= p(V_1 \cap V_2) + p(J_1 \cap J_2) = p(V_1) \times p_{V_1}(V_2) + p(J_1) \times p_{J_1}(J_2) \\ &= \frac{2}{n+2} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+2} \times \frac{n-1}{n+1}, \end{aligned}$$

d'où $p(G) = \frac{n^2 - n + 2}{n^2 + 3n + 2}$. La condition s'écrit alors:

$$p(G) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{n^2 - n + 2}{n^2 + 3n + 2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(n^2 - n + 2) \geq n^2 + 3n + 2 \quad (\text{car } n^2 + 3n + 2 \text{ et } 2 \text{ sont strictement positifs}),$$

d'où $p(G) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n^2 - 5n + 2 \geq 0$.

$x^2 - 5x + 2$ est un trinôme du second degré dont le discriminant vaut

$$\Delta = 17 > 0, \text{ celui-ci possède donc 2 racines : } x_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \approx 0,44$$

$$\text{et } x_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \approx 4,56$$

La valeur minimale de n telle que $p(G) \geq \frac{1}{2}$ est donc $n = 5$

(*) $x^2 - 5x + 2$ est du signe du coefficient de x^2 sur $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ et du signe contraire sur $]x_1; x_2[$, d'où:

$x :$	0	$x_1 \approx 0,44$	$x_2 \approx 4,56$	$+\infty$
$x^2 - 5x + 2$	+	○	○	+