Contrôle de Mathématiques

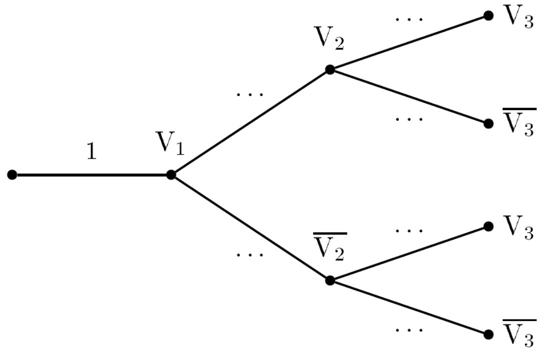
I Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.
Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n sa probabilité.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, on a donc : $p_1 = 1$.

1) Recopier et compléter l'arbre suivant en fonction des données de l'énoncé :



2) Les évènements V_1 et V_2 sont-ils indépendants ?

3) Calculer les probabilités des évènements suivants :

a) A : « les 2^e et 3^e sondages sont positifs » ;

b) B : « les 2^e et 3^e sondages sont négatifs ».

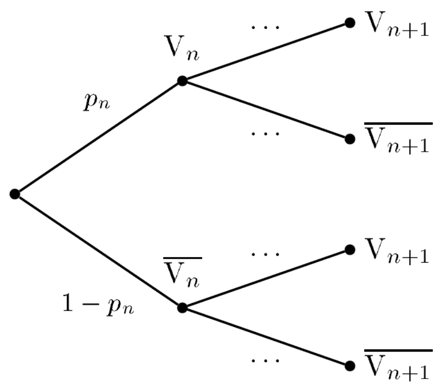
4) Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^e sondage soit positif.

5) Les évènements V_2 et V_3 sont-ils indépendants ?

6) Sachant que le 3^e sondage est négatif, calculer la probabilité d'avoir eu un 2^e sondage négatif.

7) n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



8) Établir que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}1$.

9) On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0{,}2$.

a) Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

b) Exprimer p_n en fonction de n.

c) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

II **1)** Calculer la dérivée de la fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = (2x^3 - 1)^{10}$.

2) En déduire $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x^3 - 1)^{10} - 1}{x - 1}$.

III Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{3 - 2x}$.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.

2) Calculer la dérivée de f sur $\mathscr{D}$.

3) Dresser alors le tableau complet des variations de f sur $\mathscr{D}$.

IV Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D} =]-1\,; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x - 14}{\sqrt{x + 1}}$.

On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1) Démontrer que pour tout réel $x \in \mathscr{D}$, $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 3x}{2(x + 1)\sqrt{x + 1}}$.

2) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathscr{D}$ (on n'indiquera pas les limites).

3) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.