Contrôle de Mathématiques n°3

I On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix étant équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.

On note A l'événement « l'urne a est choisie » , B l'événement « l'urne b est choisie » et R l'événement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

On note $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{R})$ la probabilité conditionnelle de l'événement R par rapport à l'événement A.

1) Dans cette question, l'urne a contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne b contient quatre boules rouges et deux boules blanches.

- **a)** Déterminer les probabilités suivantes : $p(\mathrm{A})$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{R})$, $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{R})$.
- **b)** Montrer que $p(R) = \dfrac{13}{30}$.
- **c)** Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne a ?

2) Dans cette question, on suppose que l'urne a contient quatre boules blanches et l'urne b deux boules blanches. L'urne a contient en outre n boules rouges (où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne b en contient $5 - n$.

- **a)** Exprimer $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{R})$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{R})$ en fonction de n.
- **b)** Démontrer que $p(\mathrm{R}) = \dfrac{-n^2 + 4n + 10}{(4+n)(7-n)}$.
- **c)** Sachant que $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, déterminer la répartition possible des cinq boules rouges entre les urnes a et b donnant la plus grande valeur possible de $p(\mathrm{R})$.

II On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x - x^2}$. On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1) Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f ?

2) Montrer que la dérivée de f sur $]0; 1[$ est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{-4x^2 + 5x - 1}{2\sqrt{x - x^2}}$.

3) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathscr{D}$.

4) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $0,2$.

☞

$\boxed{\textbf{III}}$ Soit f la fonction définie sur $I =]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x\left(x + \dfrac{6}{x}\right)^5$.

1) Montrer que f est dérivable sur I, de dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{6x^2 - 24}{x}\left(x + \dfrac{6}{x}\right)^4$.

On devra détailler le calcul.

2) Dresser le tableau des variations de f sur I (on n'indiquera pas les limites).

$\boxed{\textbf{IV}}$ Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a $2x + \dfrac{1}{x^2} \geqslant 3$.

(Indication : on pourra étudier la fonction $f : x \mapsto 2x + \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.)

Bonus

A) Une limite de l'année dernière...

Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(63\sqrt{x} - 62)^{64} - 1}{x - 1}$.

B) Itérations radicales...

Pour $x > 0$, on note $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$, $f_3(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$ et plus généralement pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{x}}}$ (n radicaux). Exprimer $f_n'(1)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.