TS

Calculs de primitives (entraînement)

I - Déterminer dans chaque cas la primitive F de f sur I vérifiant la condition indiquée :

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 6x - 7$; I= $\mathbb{R}$; $F(1) = 1$.

b) $f(x) = 2x^3 + \frac{2}{x^4}$; I=$]0;+\infty[$; $F(2) = 8$.

c) $f(x) = \frac{2}{5x^2} - \frac{3}{\sqrt{x}}$; I=$]0;+\infty[$; $F(1) = -7$.

d) $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{2}\cos(5x)$; I= $\mathbb{R}$; $F(0) = 3$.

e) $f(x) = 4e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{4}e^{\frac{5x}{4}}$; I= $\mathbb{R}$; $F(0) = 0$.

II Déterminer les primitives de f sur I dans chaque cas :

a) $f(x) = \frac{3}{(1+2x)^2}$; I=$]-0,5;+\infty[$.

b) $f(x) = \frac{2-4x}{(x^2-x+1)^3}$; I=$\mathbb{R}$.

c) $f(x) = 12x^3(x^4-2)^5$; I=$\mathbb{R}$.

d) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{4x+1}}$; I=$]-\infty;-0,25[$.

e) $f(x) = (x^3-2)e^{x^4-8x+7}$; I= $\mathbb{R}$.

f) $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)\sin^5\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$; I= $\mathbb{R}$.

————————ÉLÉMENTS DE CORRECTION————————

I.a) On a $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 6x^1 - 7$. Or pour $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$, une primitive de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Donc les primitives de f sont les : $F : x \mapsto -\frac{1}{3} \times \frac{x^{2+1}}{2+1} + 6 \times \frac{x^{1+1}}{1+1} - 7x + C$ (où C est une constante arbitraire), soit : $F : x \mapsto -\frac{1}{9}x^3 + 3x^2 - 7x + C$.

$F(1) = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{9} \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 7 \times 1 + C = 1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{après calcul}} C = \frac{46}{9}$.

D'où $F : x \mapsto -\frac{1}{9}x^3 + 3x^2 - 7x + \frac{46}{9}$.

I.b) On a $f(x) = 2x^3 + 2 \times x^{-4}$. Or pour $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$, une primitive de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Donc les primitives de f sont les $F : x \mapsto 2 \times \frac{x^{3+1}}{3+1} + 2 \times \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} + C$ (C constante). Soit $F : x \mapsto \frac{x^4}{2} - \frac{2}{3x^3} + C$.

$F(2) = 8 \Leftrightarrow \frac{2^4}{2} - \frac{2}{24} + C = 8 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{après calcul}} C = \frac{1}{12}$.

D'où $F : x \mapsto \frac{x^4}{2} - \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{12}$.

I.c) On a $f(x) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{x^2} - 3 \times \frac{1}{\sqrt{x}}$. Or une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ (resp. $x \mapsto \frac{1}{x^2}$) est $x \mapsto 2\sqrt{x}$ (resp. $x \mapsto -\frac{1}{x}$) donc les primitives de f sont les $F : x \mapsto \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{x}\right) - 3 \times 2\sqrt{x} + C$ (C constante), soit $F : x \mapsto -\frac{2}{5x} - 6\sqrt{x} + C$.

$F(1) = -7 \Leftrightarrow -\frac{2}{5} - 6\sqrt{1} + C = -7 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{après calcul}} C = -\frac{3}{5}$.

D'où $F : x \mapsto -\frac{2}{5x} - 6\sqrt{x} - \frac{3}{5}$.

I.d) Si U est une primitive de u et $a \neq 0$, une primitive de $x \mapsto u(ax+b)$ est $x \mapsto \frac{1}{a}U(ax+b)$, donc les primitives de f sont les $F : x \mapsto 2 \times \frac{1}{\frac{1}{4}} \left[-\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right] + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\sin(5x) + C$ (C constante), soit $F : x \mapsto -8\cos\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{10}\sin(5x) + C$.
$F(0) = 3 \Leftrightarrow -8\cos\left(\frac{0}{4}\right) + \frac{1}{10}\sin(0) + C = 3 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{après calcul}} C = 11$.
D'où $F : x \mapsto -8\cos\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{10}\sin(5x) + 11$.

I.e) Si U est une primitive de u et $a \neq 0$, une primitive de $x \mapsto u(ax+b)$ est $x \mapsto \frac{1}{a}U(ax+b)$, donc les primitives de f sont les $F : x \mapsto 4 \times \frac{1}{-\frac{1}{3}}e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{5}{4}}e^{\frac{5x}{4}} + C$ (C constante), soit $F : x \mapsto -12e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{5}e^{\frac{5x}{4}} + C$.
$F(0) = 0 \Leftrightarrow -12e^{-\frac{0}{3}} - \frac{1}{5}e^{\frac{5\times 0}{4}} + C = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{après calcul}} C = \frac{61}{5}$.
Finalement $F : x \mapsto -12e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{5}e^{\frac{5x}{4}} + \frac{61}{5}$.

II.a) On a $f(x) = \frac{3}{(1+2x)^2}$. Posons $u = 1 + 2x$, on a donc $u' = 2$. On écrit alors $f(x) = \frac{3}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{(1+2x)^2} = \frac{3}{2} \times \frac{u'}{u^2}$. Or une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u}$ donc les primitives de f sont les : $F = \frac{3}{2} \times \frac{-1}{u} + C$ (C constante), soit $F : x \mapsto -\frac{3}{2(1+2x)} + C$.

II.b) On a $f(x) = (2-4x)(x^2-x+1)^{-3}$. Posons $u = x^2 - x + 1$, on a donc $u' = 2x - 1$. On écrit alors $f(x) = -2(2x-1)(x^2-x+1)^{-3} = -2 \times u' \times u^{-3}$. Or pour $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$, une primitive de $u' \times u^n$ est $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ donc les primitives de f sont les $F = -2 \times \frac{1}{-3+1}u^{-3+1} + C = u^{-2} + C = \frac{1}{u^2} + C$ (C constante), soit : $F : x \mapsto \frac{1}{(x^2-x+1)^2} + C$.

II.c) On a $f(x) = 12x^3(x^4-2)^5$. Posons $u = x^4 - 2$, on a donc $u' = 4x^3$. On écrit alors $f(x) = 3 \times 4x^3(x^4-2)^5 = 3 \times u'u^5$. Or pour $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$, une primitive de $u'u^n$ est $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ donc les primitives de f sont les $F = 3 \times \frac{1}{5+1}u^{5+1} + C = \frac{1}{2} \times u^6 + C$ (C constante), soit : $F : x \mapsto \frac{1}{2}(x^4-2)^6 + C$.

II.d) On a $f(x) = \frac{3}{\sqrt{4x+1}}$. Posons $u = 4x + 1$, on a donc $u' = 4$. On écrit alors $f(x) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{\sqrt{4x+1}} = \frac{3}{4} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$. Or une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$ donc les primitives de f sont les $F : x \mapsto \frac{3}{4} \times 2\sqrt{4x+1} + C$ (C constante), soit $F : x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{4x+1} + C$.

II.e) On a $f(x) = (x^3-2)e^{x^4-8x+7}$. Posons $u = x^4-8x+7$, on a donc $u' = 4x^3 - 8 = 4(x^3-2)$. On écrit alors $f(x) = \frac{1}{4} \times 4(x^3-2)e^{x^4-8x+7} = \frac{1}{4} \times u'e^u$. Or une primitive de $u'e^u$ est e^u donc les primitives de f sont les $F = \frac{1}{4}e^u + C$ (C constante), soit $F : x \mapsto \frac{1}{4}e^{x^4-8x+7} + C$.

II.f) On a $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)\sin^5\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$. Posons $u = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$, on a donc $u' = 3\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$. On écrit alors $f(x) = \frac{1}{3} \times 3\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)\sin^5\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} \times u' \times u^5$. Or pour $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$, une primitive de $u' \times u^n$ est $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ donc les primitives de f sont les $F = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5+1}u^{5+1} + C$ (C constante), soit $F : x \mapsto \frac{1}{18}\sin^6\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + C$.