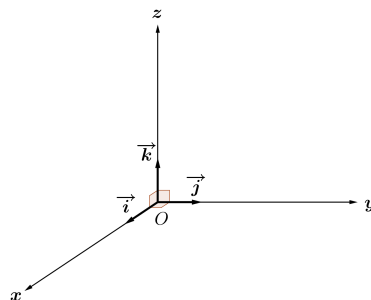


↪ Suite du § IV (produit scalaire) du cours « Géométrie vectorielle dans l'espace »

Définition : le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit orthonormé (ou orthonormal) lorsque :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \\ \vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k} \text{ et } \vec{i} \perp \vec{k} \end{array} \right.$$



Dans toute la suite, on se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Propriété : soient deux vecteurs $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'$.

Conséquences : 1) $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. En effet $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2 = a \times a + b \times b + c \times c$.

2) Si A et B sont deux points de l'espace, on a $\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ et $AB = \|\vec{AB}\|$,
d'où : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Exemple : soient les points $A(1, -1, 1)$, $B(-2, 0, 5)$ et $C(4, 0, 3)$. Montrons que le triangle ABC est rectangle en A :

Propriétés algébriques : soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace k un réel. Alors :

1) **symétrie :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2) **bilinéarité :** $\begin{cases} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$

3) **identités remarquables :** $\begin{cases} (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \\ (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \end{cases}$

Définition : un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit **normal** au plan $\mathcal{P}$
lorsqu'il dirige une droite orthogonale à $\mathcal{P}$.

Remarques : 1) Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si il est orthogonal à tout vecteur du plan $\mathcal{P}$.

- 2) Deux vecteurs normaux au même plan sont forcément colinéaires, vu que deux droites orthogonales au même plan sont parallèles.
- 3) Deux plans sont parallèles si et seulement si
un vecteur normal de l'un est colinéaire à un
vecteur normal de l'autre

Proposition : soit $\mathcal{P}$ un plan de base $(\vec{u}, \vec{v})$ et $\vec{n} \neq \vec{0}$. Alors $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$.

Démonstration :

Remarque : cela prouve donc la propriété 8 de la partie I du cours de géométrie dans l'espace :
une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes incluses dans ce plan.

Définition : deux plans sont dits ***perpendiculaires*** lorsque l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre.

Propriété : deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

V Équation cartésienne d'un plan

Soit $\vec{n}(a, b, c)$ un vecteur non nul et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A et possédant $\vec{n}$ pour vecteur normal :

Propriété : M appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Démonstration :

Conséquence :

On a donc prouvé le résultat suivant :

Propriété : tout plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ possède une équation cartésienne de la forme :
 $ax + by + cz + d = 0$.

Remarque : réciproquement si a, b, c et d sont des réels (avec a, b et c non simultanément nuls), alors l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

Exemples : 1) Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - y + z + 1 = 0$.

2) Déterminons une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et orthogonal à la droite (AB) avec $A(1, -2, 3)$ et $B(0, 1, 1)$:

3) Soient les plans $\mathcal{P} : x - y + z + 1 = 0$, $\mathcal{P}' : 2x - 2z + 3 = 0$ et $\mathcal{P}'' : -2x + 2y - 2z - 7 = 0$.

4) Un plan parallèle au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ a une équation de la forme

Un plan parallèle au plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$ a une équation de la forme

Un plan parallèle au plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$ a une équation de la forme

Remarque : soit $\mathcal{P}$ un plan possédant $\vec{n}$ pour vecteur normal et $\mathcal{D}$ une droite possédant $\vec{u}$ pour vecteur directeur, alors : $\mathcal{P} \parallel \mathcal{D} \iff \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.