Produit scalaire dans le plan : exercices

$\boxed{1}$ **a)** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Montrer que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) .$$

b) En déduire que si ABCD est un parallélogramme, alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{1}{4}\left(\mathrm{AC}^2 - \mathrm{BD}^2\right) .$$

$\boxed{2}$ L'identité du parallélogramme

a) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Montrer que :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2 .$$

b) En déduire que si ABCD est un parallélogramme, alors :

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 + \mathrm{DA}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2 .$$

(Dans un parallélogramme, la somme des carrés des deux diagonales est égale à la somme des carrés des quatres côtés.)

$\boxed{3}$ Soit ABCD un rectangle. Démontrer que pour tout point M du plan, on a :

a) $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathrm{MB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MD}}$.
b) $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MC}^2 = \mathrm{MB}^2 + \mathrm{MD}^2$.

$\boxed{4}$ Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC]. On suppose que $\mathrm{BC} = 4$ et $\mathrm{AI} = 6$.
$\hookrightarrow$ Calculer $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

$\boxed{5}$ Le théorème de la médiane

Soit [AB] un segment de milieu I. Si M est un point quelconque, montrer que :

$$\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = 2\mathrm{MI}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{AB}^2 .$$

$\boxed{6}$ Deux relations dans le triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A. Montrer que :

a) $\mathrm{BC} \times \mathrm{BH} = \mathrm{AB}^2$.
b) $\mathrm{HB} \times \mathrm{HC} = \mathrm{HA}^2$.

$\boxed{7}$ Relation d'Al-Kashi, relation des sinus, formule de Héron

Soit ABC un triangle quelconque. On note $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$, $c = \mathrm{AB}$ et α (resp. β, γ) une mesure de l'angle $\hat{\mathrm{A}}$ (resp. $\hat{\mathrm{B}}$, $\hat{\mathrm{C}}$).

a) Prouver que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

b) Montrer que : $\sin^2\alpha = \dfrac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}{4b^2c^2}$.

c) Établir que : $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$.

d) Notons p le demi-périmètre du triangle ABC. Démontrer que l'aire du triangle ABC est égale à : $\mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$\boxed{8}$ Soit ABC un triangle avec $\mathrm{AB} = 7$, $\mathrm{AC} = 8$ et $\mathrm{BC} = 12$. Calculer à 10^{-2} près des mesures en degrés des angles du triangle ABC.

$\boxed{9}$ Triangles entiers avec un angle de 60°

a) Montrer qu'un triangle ayant des côtés de longueurs respectives 7, 15 et 13 possède un angle de 60°.
b) Soit ABC un triangle avec $\mathrm{AB} = 8$, $\mathrm{BC} = 7$ et $\hat{\mathrm{A}} = 60°$. Montrer que AC peut prendre deux valeurs possibles.
c) Soient s un entier supérieur ou égal à 2 et ABC un triangle tel que :

$$\mathrm{AB} = 3s^2 - 2s - 1 \quad , \quad \mathrm{AC} = 3s^2 + 2s - 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{BC} = 3s^2 + 1 \quad .$$

Montrer que $\hat{\mathrm{A}} = 60°$.

$\boxed{10}$ Existence de l'orthocentre

a) Soient A, B, C et M quatre points. Montrer la relation :

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

b) En déduire une preuve rigoureuse du fait que les trois hauteurs dans un triangle sont concourantes.

$\boxed{11}$ Condition d'orthogonalité des diagonales dans un quadrilatère

Soit ABCD un quadrilatère. Montrer qu'on a la relation :

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{CD}^2 - \mathrm{BC}^2 - \mathrm{DA}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0 \ .$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité des diagonales dans un quadrilatère.

$\boxed{12}$ **Puissance d'un point par rapport à un cercle**

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon $r > 0$ et M un point situé à l'extérieur de $\mathscr{C}$. Une droite d passant par M coupe $\mathscr{C}$ en A et B. Montrer que :

$$\mathrm{MA} \times \mathrm{MB} = \mathrm{OM}^2 - r^2 \ .$$

(Indication : on pourra utiliser le centre O du cercle $\mathscr{C}$ ainsi que le milieu I du segment [AB].)

$\boxed{13}$ **Le théorème des trois perpendiculaires**

Soient ABC un triangle non aplati et une droite Δ. On note A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur Δ.

a)Établir que la perpendiculaire à (AC) contenant B' et la perpendiculaire à (AB) contenant C' sont sécantes. On note W leur point d'intersection. Faire une figure.
b) Démontrer que W appartient à la perpendiculaire à (BC) passant par A'.

$\boxed{14}$ **Une orthogonalité...**

Soient ABC un triangle isocèle en A. I est le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de I sur (AC). On désigne par J le milieu de [IH].

a) Faire une figure.
b) Démontrer que les droites (AJ) et (BH) sont orthogonales.

$\boxed{15}$ **Formules de trigonométrie**

Soit $\left(\mathrm{O}\,,\vec{\mathrm{i}}\,,\vec{\mathrm{j}}\right)$ un repère orthonormal ; $\mathscr{C}$ désigne le cercle trigonométrique. Soient α et β deux réels ; on note A et B les points de $\mathscr{C}$ définis par $\left(\vec{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \alpha$ et $\left(\vec{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \beta$.

a) Donner les coordonnées de A et B dans le repère $\left(\mathrm{O}\,,\vec{\mathrm{i}}\,,\vec{\mathrm{j}}\right)$.
b) En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ de deux façons distinctes, exprimer $\cos(\beta - \alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\alpha$ et $\sin\beta$.
c) Application : calculer la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ (on pourra chercher deux valeurs simples de α et β telles que $\dfrac{\pi}{12} = \beta - \alpha$).

d) Soient a et b deux réels. Utiliser la relation établie à la question b) pour exprimer $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$ et $\sin b$.