

- n°: 37 p 256 a) D'après la relation d'Al-Kashi, nous avons:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos(30^\circ),$$

$$\text{soit } BC^2 = 136 - 120 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 136 - 60\sqrt{3} \text{ et finalement,}$$

$$BC = \sqrt{136 - 60\sqrt{3}}, \text{ vu que } BC > 0, \text{ soit } BC = 2\sqrt{34 - 15\sqrt{3}} \approx 5,66$$

- b) Utilisons de nouveau la relation d'Al-Kashi:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos(\widehat{ACB}). \text{ On en déduit que}$$

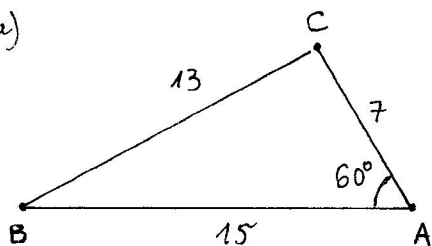
$$\cos \widehat{ACB} = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \times BC} \approx 0,8482; \text{ la calculatrice fournit}$$

$$\text{alors } \widehat{ACB} \approx 31,98^\circ, \text{ d'où } \widehat{ABC} \approx 180^\circ - (30^\circ + 31,98^\circ) \approx 118,02^\circ.$$

- c) Raisonnons dans le triangle ABH, rectangle en H: $\sin(30^\circ) = \frac{HB}{AB}$, d'où $HB = AB \times \sin(30^\circ) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$.

- Exercice n°: 9 du polycopié "Produit scalaire dans le plan, exercices"

a)



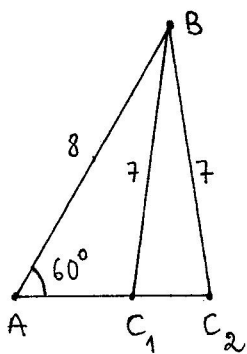
Soit ABC un triangle tel que $AB=15$, $AC=7$ et $BC=13$. La relation d'Al-Kashi donne:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \text{ donc}$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} = \frac{15^2 + 7^2 - 13^2}{2 \times 7 \times 15} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } \widehat{BAC} = 60^\circ.$$

b)



Notons $a=BC$, $b=AC$ et $c=AB$. D'après la relation d'Al-Kashi, on a: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ$, d'où

$$7^2 = 8^2 + b^2 - 2 \times 8 \times b \times \frac{1}{2}, \text{ ou encore:}$$

$$b^2 - 8b + 15 = 0. \text{ Il s'agit d'une équation du second degré dont on peut facilement vérifier qu'elle possède deux solutions distinctes: } b_1 = 3 \text{ et } b_2 = 5.$$

On a donc $AC=3$ ou $AC=5$.

- c) La relation d'Al-Kashi s'écrit $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{A}$, d'où

$$\cos \widehat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}. \text{ On a } BC^2 = (3s^2 + 1)^2 = 9s^4 + 6s^2 + 1,$$

$$AB^2 = (3s^2 - 1 - 2s)^2 = (3s^2 - 1)^2 - 2 \times 2s(3s^2 - 1) + 4s^2,$$

$$AC^2 = (3s^2 - 1 + 2s)^2 = (3s^2 - 1)^2 + 2 \times 2s(3s^2 - 1) + 4s^2, \text{ d'où}$$

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2(3s^2 - 1)^2 + 8s^2 - (9s^4 + 6s^2 + 1)$$

$$= 2(9s^4 - 6s^2 + 1) + 8s^2 - 9s^4 - 6s^2 - 1 = 9s^4 - 10s^2 + 1.$$

$$\text{D'autre part, } AB \times AC = [(3s^2 - 1) - 2s][(3s^2 - 1) + 2s] = (3s^2 - 1)^2 - (2s)^2 = 9s^4 - 10s^2 + 1.$$

On obtient alors : $\cos \hat{A} = \frac{9s^4 - 10s^2 + 1}{2(9s^4 - 10s^2 + 1)} = \frac{1}{2}$, d'où $\hat{A} = 60^\circ$.

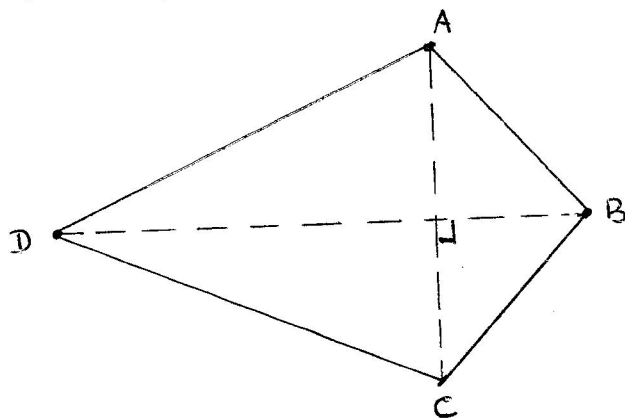
d) Lorsque s est un entier, $AB = 3s^2 - 2s - 1$, $AC = 3s^2 + 2s - 1$ et $BC = 3s^2 + 1$ sont également entiers. On a $AC - AB = (3s^2 + 2s - 1) - (3s^2 - 2s - 1) = 4s$.
Pour avoir $AC - AB = 100$, il suffit de prendre $s = 25$. On a alors $AB = 1824$, $AC = 1924$ et $BC = 1876$.

• Exercice n° 11 du polycopié "Produit scalaire dans le plan : exercices"

$$\begin{aligned} \text{On a } & AB^2 + CD^2 - BC^2 - DA^2 + 2\vec{AC} \cdot \vec{BD} \\ &= \vec{AB}^2 - \vec{BC}^2 + \vec{CD}^2 - \vec{DA}^2 + 2\vec{AC} \cdot \vec{BD} \\ &= (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AB} - \vec{BC}) + (\vec{CD} + \vec{DA}) \cdot (\vec{CD} - \vec{DA}) + 2\vec{AC} \cdot \vec{BD} \\ &= \vec{AC} \cdot (\vec{AB} + \vec{CB}) + \vec{CA} \cdot (\vec{CD} + \vec{AD}) + 2\vec{AC} \cdot \vec{BD} \\ &= \vec{AC} \cdot (\vec{AB} + \vec{CB}) - \vec{AC} \cdot (\vec{CD} + \vec{AD}) + \vec{AC} \cdot (2\vec{BD}) \\ &= \vec{AC} \cdot (\vec{AB} + \vec{CB} - \vec{CD} - \vec{AD} + 2\vec{BD}) \\ &= \vec{AC} \cdot (\vec{DA} + \vec{AB} + \vec{DC} + \vec{CB} + 2\vec{BD}) \\ &= \vec{AC} \cdot (\vec{DB} + \vec{DB} + 2\vec{BD}) = \vec{AC} \cdot (\underbrace{2\vec{DB} + 2\vec{BD}}_{\vec{0}}) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \frac{1}{2} (DA^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2)$.

Or, les diagonales du quadrilatère ABCD sont orthogonales si et seulement si $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$, ce qui équivaut à $DA^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2 = 0$, ou encore à $DA^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.



Ainsi un quadrilatère ABCD a ses diagonales orthogonales si et seulement si la somme des carrés de 2 côtés opposés est constante.