

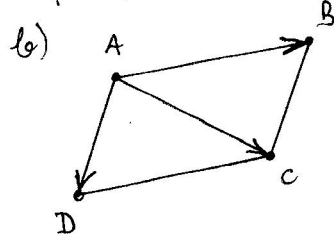
1) a) Utilisons les « identités remarquables » vues en cours :

$$\text{On a } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \text{ et } \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\text{donc } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2)$$

$$\text{soit } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v},$$

$$\text{ce qui permet de déduire que : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$



b) En choisissant $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AD}$, la relation précédente donne : $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{4} (\|\vec{AB} + \vec{AD}\|^2 - \|\vec{AB} - \vec{AD}\|^2)$.

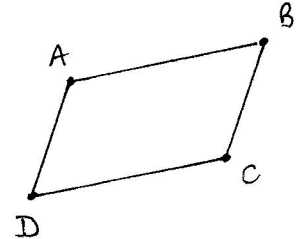
Or $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{DA} = \vec{DA} + \vec{AB} = \vec{DB}$ et comme ABCD est un parallélogramme, $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$. Par conséquent :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{4} (\|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{DB}\|^2) = \frac{1}{4} (AC^2 - DB^2) = \frac{1}{4} (AC^2 - BD^2).$$

2) a) Utilisons à nouveau les identités remarquables évoquées au 1) a) ; on a

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2, \text{ d'où } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2.$$

b) En choisissant $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$ dans la relation obtenue à la question précédente, on obtient : $\|\vec{AB} + \vec{BC}\|^2 + \|\vec{AB} - \vec{BC}\|^2 = 2\|\vec{AB}\|^2 + 2\|\vec{BC}\|^2$.



Or $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ et comme ABCD est un parallélogramme, $\vec{BC} = \vec{AD}$, d'où $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DA} + \vec{AB} = \vec{DB}$. On en déduit que :

$$\|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{DB}\|^2 = 2\|\vec{AB}\|^2 + 2\|\vec{BC}\|^2, \text{ soit } AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2.$$

D'autre part $AB = CD$ et $BC = DA$ donc $AB^2 + CD^2 = 2AB^2$ et $BC^2 + DA^2 = 2BC^2$

$$\text{et finalement } AC^2 + BD^2 = \underbrace{AB^2 + CD^2}_{2AB^2} + \underbrace{BC^2 + DA^2}_{2BC^2} = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

3) a) On a $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = (\vec{MB} + \vec{BA}) \cdot (\vec{MD} + \vec{DC})$, d'où

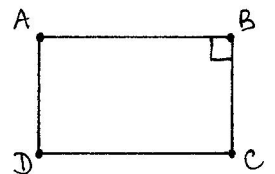
$$\vec{MA} \cdot \vec{MC} = \vec{MB} \cdot \vec{MD} + \vec{MB} \cdot \vec{DC} + \vec{BA} \cdot \vec{MD} + \vec{BA} \cdot \vec{DC}$$

Or $\vec{DC} = -\vec{BA}$ car ABCD est un rectangle donc

$$\vec{MA} \cdot \vec{MC} = \vec{MB} \cdot \vec{MD} + \vec{MB} \cdot (-\vec{BA}) + \vec{BA} \cdot \vec{MD} + \vec{BA} \cdot \vec{DC}$$

$$= \vec{MB} \cdot \vec{MD} - \vec{BA} \cdot \vec{MB} + \vec{BA} \cdot \vec{MD} + \vec{BA} \cdot \vec{DC}$$

$$= \vec{MB} \cdot \vec{MD} + \vec{BA} \cdot (-\vec{MB} + \vec{MD} + \vec{DC}) = \vec{MB} \cdot \vec{MD} + \vec{BA} \cdot (\underbrace{\vec{BM} + \vec{MD} + \vec{DC}}_{\vec{BC}})$$



Comme ABCD est un rectangle, on a en particulier $\vec{BA} \perp \vec{BC}$,

d'où $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$ et finalement $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = \vec{MB} \cdot \vec{MD}$.

b) On a $MA^2 + MC^2 = \vec{MA}^2 + \vec{MC}^2 = (\vec{MB} + \vec{BA})^2 + (\vec{MD} + \vec{DC})^2$, d'où

$$MA^2 + MC^2 = \vec{MB}^2 + 2\vec{MB} \cdot \vec{BA} + \vec{BA}^2 + \vec{MD}^2 + 2\vec{MD} \cdot \vec{DC} + \vec{DC}^2.$$

Comme ABCD est un rectangle, on a $\vec{DC} = -\vec{BA}$ donc

$$\begin{aligned}
 MA^2 + MC^2 &= MB^2 + MD^2 + 2\vec{MB} \cdot \vec{BA} + 2\vec{MD} \cdot (-\vec{BA}) + \vec{BA}^2 + (-\vec{BA})^2 \\
 &= MB^2 + MD^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{MB} - 2\vec{BA} \cdot \vec{MD} + 2\vec{BA}^2 \\
 &= MB^2 + MD^2 + 2\vec{BA} \cdot (\vec{MB} - \vec{MD} + \vec{BA}) = MB^2 + MD^2 + 2\vec{BA} \cdot (\vec{DM} + \vec{MB} + \vec{BA})
 \end{aligned}$$

Or $\vec{BA} \perp \vec{DA}$ donc $\vec{BA} \cdot \vec{DA} = 0$ et finalement $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

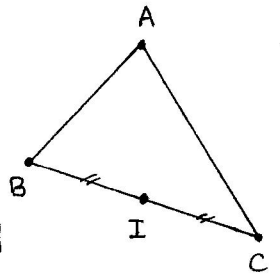
• 2^{ème} solution (évoquée en classe)

$$\begin{aligned}
 \text{On a } MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 &= \vec{MA}^2 - \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 - \vec{MD}^2 \\
 &= (\vec{MA} - \vec{MB}) \cdot (\vec{MA} + \vec{MB}) + (\vec{MC} - \vec{MD}) \cdot (\vec{MC} + \vec{MD}) \\
 &= (\underbrace{\vec{BM} + \vec{MA}}_{\vec{BA}}) \cdot (\vec{MA} + \vec{MB}) + (\underbrace{\vec{DM} + \vec{MC}}_{\vec{DC}}) \cdot (\vec{MC} + \vec{MD}) \quad \text{Or } \vec{DC} = -\vec{BA} \text{ donc} \\
 MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 &= \vec{BA} \cdot (\vec{MA} + \vec{MB}) - \vec{BA} \cdot (\vec{MC} + \vec{MD}) \\
 &= \vec{BA} \cdot (\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}) \\
 &= \vec{BA} \cdot (\vec{DM} + \vec{MA} + \vec{CM} + \vec{MB}) = \vec{BA} \cdot (\vec{DA} + \vec{CB}) = \vec{BA} \cdot (2\vec{DA}) \\
 &= 2\vec{BA} \cdot \vec{DA} = 2 \times 0 = 0 \text{ car } \vec{BA} \perp \vec{DA}.
 \end{aligned}$$

Finalement $MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 = 0$, d'où $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

• 3^{ème} solution : comme ABCD est un rectangle, ses diagonales sont de même longueur donc $AC^2 = BD^2$, soit $\vec{AC}^2 = \vec{BD}^2$. On en déduit que : $(\vec{AM} + \vec{MC})^2 = (\vec{BM} + \vec{MD})^2$, d'où $\vec{AM}^2 + 2\vec{AM} \cdot \vec{MC} + \vec{MC}^2 = \vec{BM}^2 + 2\vec{BM} \cdot \vec{MD} + \vec{MD}^2$ ou encore : $MA^2 - 2\vec{MA} \cdot \vec{MC} + MC^2 = MB^2 - 2\vec{MB} \cdot \vec{MD} + MD^2$ et finalement $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 + 2(\underbrace{\vec{MA} \cdot \vec{MC} - \vec{MB} \cdot \vec{MD}}_0 \text{ d'après la question a)}) = MB^2 + MD^2$

$$\begin{aligned}
 \text{[4] On a } \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= (\vec{AI} + \vec{IB}) \cdot (\vec{AI} + \vec{IC}) \\
 &= \vec{AI}^2 + \vec{AI} \cdot \vec{IC} + \vec{IB} \cdot \vec{AI} + \vec{IB} \cdot \vec{IC} \\
 &= AI^2 + \underbrace{\vec{AI} \cdot \vec{IC} + \vec{AI} \cdot \vec{IC}}_0 - \vec{IC} \cdot \vec{IC} \quad (\text{On a } \vec{IB} = -\vec{IC}) \\
 &\quad \text{car I est le milieu de [BC]} \\
 \text{d'où } \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= AI^2 - IC^2 = 6^2 - IC^2 = 36 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = 36 - 2^2 = 32
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{[5] On a } MA^2 + MB^2 &= \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 \\
 &= (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 \\
 &= \vec{MI}^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + \vec{IA}^2 + \vec{MI}^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IB} + \vec{IB}^2 \\
 &= 2MI^2 + 2\vec{MI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB}) + IA^2 + IB^2.
 \end{aligned}$$

Comme I est le milieu de [AB], on a $\begin{cases} IA = IB = \frac{AB}{2} \\ \text{et } \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \end{cases}$, par conséquent $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2\underbrace{\vec{MI} \cdot \vec{0}}_0 + 2 \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2$,

et finalement $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$.

