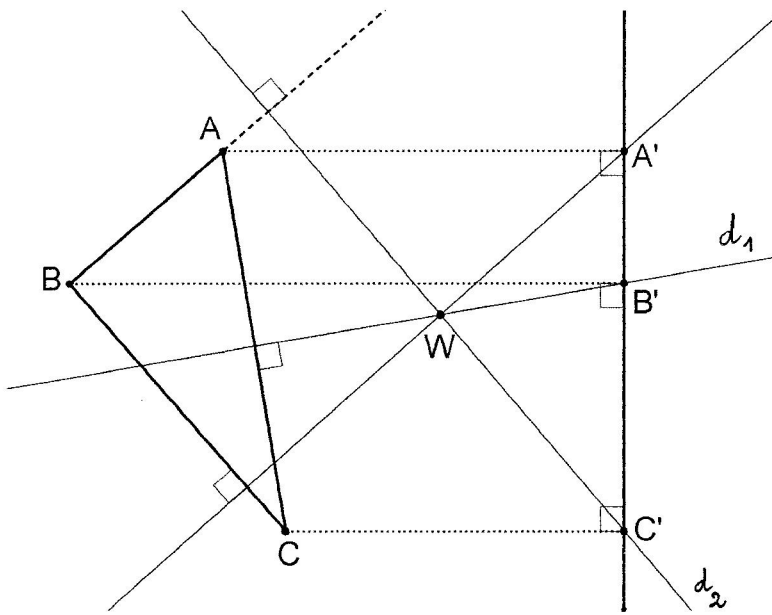


(13)



a) Notons d_1 (resp. d_2) la perpendiculaire à (AC) contenant B' [resp. à (AB) contenant C']. Raisonnons par l'absurde en supposant que d_1 et d_2 ne soient pas sécantes; elles sont donc parallèles.

On a $d_1 \perp (AC)$ } donc $d_2 \perp (AC)$
 et $d_1 \parallel d_2$ }
 d'où $d_2 \perp (AC)$ } donc $(AC) \parallel (AB)$, ce
 et $d_2 \perp (AB)$ }

qui contredit le fait que le triangle ABC n'est pas aplati.

Conclusion: d_1 et d_2 sont sécantes.

b) Il nous faut montrer que $(A'W) \perp (BC)$, c'est à dire que $\vec{A'W} \cdot \vec{BC} = 0$.

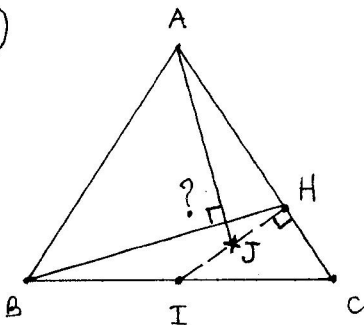
$$\begin{aligned} \text{On a } \vec{A'W} \cdot \vec{BC} &= (\vec{A'B'} + \vec{B'W}) \cdot \vec{BC} = \vec{A'B'} \cdot \vec{BC} + \vec{B'W} \cdot \vec{BC} \\ &= \vec{A'B'} \cdot (\vec{BB'} + \vec{B'C'} + \vec{C'C}) + \vec{B'W} \cdot (\vec{BA} + \vec{AC}) \\ &= \vec{A'B'} \cdot \vec{BB'} + \vec{A'B'} \cdot \vec{B'C'} + \vec{A'B'} \cdot \vec{C'C} + \vec{B'W} \cdot \vec{BA} + \vec{B'W} \cdot \vec{AC} \end{aligned}$$

Or $(A'B') \perp (BB')$, $(A'B') \perp (CC')$ et $(B'W) \perp (AC)$ donc $\vec{A'B'} \cdot \vec{BB'} = 0$, $\vec{A'B'} \cdot \vec{C'C} = 0$ et

$$\begin{aligned} \vec{B'W} \cdot \vec{AC} &= 0, \text{ d'où } \vec{A'W} \cdot \vec{BC} = \vec{A'B'} \cdot \vec{B'C'} + \vec{B'W} \cdot \vec{BA} \\ &= \vec{A'B'} \cdot \vec{B'C'} + (\vec{B'C'} + \vec{C'W}) \cdot \vec{BA} \\ &= \vec{A'B'} \cdot \vec{B'C'} + \vec{B'C'} \cdot \vec{BA} + \underbrace{\vec{C'W} \cdot \vec{BA}}_{0 \text{ car } CC'W \perp (AB)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \vec{A'W} \cdot \vec{BC} &= \vec{A'B'} \cdot \vec{B'C'} + \vec{B'C'} \cdot (\vec{BB'} + \vec{B'A'} + \vec{A'A}) \\ &= \vec{A'B'} \cdot \vec{B'C'} + \underbrace{\vec{B'C'} \cdot \vec{BB'}}_0 + \vec{B'C'} \cdot \vec{B'A'} + \underbrace{\vec{B'C'} \cdot \vec{A'A}}_0 \text{ car } (B'C') \perp (BB') \text{ et } (B'C') \perp (AA') \\ &= \vec{A'B'} \cdot \vec{B'C'} - \vec{A'B'} \cdot \vec{B'C'} = 0. \end{aligned}$$

(14)



Il nous faut montrer que $\vec{AJ} \cdot \vec{BH} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \vec{AJ} \cdot \vec{BH} &= (\vec{AH} + \vec{HJ}) \cdot (\vec{BI} + \vec{IH}) \\ &= \vec{AH} \cdot \vec{BI} + \underbrace{\vec{AH} \cdot \vec{IH} + \vec{HJ} \cdot \vec{BI}}_{0 \text{ car } (AH) \perp (IH)} + \vec{HJ} \cdot \vec{IH} \\ &= (\vec{AI} + \vec{IH}) \cdot \vec{BI} + \vec{HJ} \cdot \vec{IC} - \frac{1}{2} \vec{IH}^2 \end{aligned}$$

car $\vec{BI} = \vec{IC}$ et $\vec{HJ} = -\frac{1}{2} \vec{IH}$, vu que I et J sont

les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[IH]$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } \vec{AJ} \cdot \vec{BH} &= \underbrace{\vec{AI} \cdot \vec{BI}}_{0 \text{ car } (AI) \perp (BI)} + \vec{IH} \cdot \vec{BI} + \vec{HJ} \cdot \vec{IC} - \frac{1}{2} \vec{IH}^2 = \vec{IH} \cdot \vec{IC} - \frac{1}{2} \vec{IH} \cdot \vec{IC} - \frac{1}{2} \vec{IH}^2 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{car } \vec{BI} = \vec{IC} \\ &\quad \text{et } \vec{HJ} = -\frac{1}{2} \vec{IH} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \vec{AJ} \cdot \vec{BH} = \frac{1}{2} \vec{IH} \cdot \vec{IC} - \frac{1}{2} \vec{IH}^2 = \frac{1}{2} \vec{IH} \cdot (\vec{IC} - \vec{IH}) = \frac{1}{2} \vec{IH} \cdot (\vec{HI} + \vec{IC})$$

$$\text{et finalement } \vec{AJ} \cdot \vec{BH} = \frac{1}{2} \vec{IH} \cdot \vec{HC} = 0 \quad \text{car } (IH) \perp (HC).$$