TS - Correction du II de la feuille "Vecteurs coplanaires : exercices".

1) a) D'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GN}$.

Or $\overrightarrow{MC} = \frac{MC}{DC}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{GN} = \frac{GN}{GF}\overrightarrow{GF} = \frac{GN}{GF}\overrightarrow{CB}$, $MC = GN$ et $DC = GF$, donc $\frac{MC}{DC} = \frac{GN}{GF}$. On en déduit que $\overrightarrow{MN} = \frac{MC}{DC}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} + \frac{MC}{DC}\overrightarrow{CB}$, soit

$$\overrightarrow{MN} = \frac{MC}{DC}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CG} = \frac{MC}{DC}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = \frac{MC}{DC}\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{FB}.$$

Ainsi, $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{DB} + \beta\overrightarrow{FB}$ avec $\alpha = \frac{MC}{DC}$ et $\beta = -1$, ce qui prouve bien que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont coplanaires.

1) b) $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BFH), donc $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{FB})$ est une base du plan (BFH). Comme $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont coplanaires, cela prouve que $(MN) /\!/ (BFH)$.

2) • $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont deux vecteurs non colinéaires (car M, P et N ne sont pas alignés)

• $\overrightarrow{MN}$ est un vecteur du plan (BFH) car $(MN) /\!/ (BFH)$ d'après 1)b).

• On a $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CP} = \frac{MC}{DC}\overrightarrow{DC} + \frac{CP}{CB}\overrightarrow{CB}$, $MC = CP$ et $DC = CB$ donc

$\frac{MC}{DC} = \frac{CP}{CB}$ et $\overrightarrow{MP} = \frac{MC}{DC}\overrightarrow{DC} + \frac{MC}{DC}\overrightarrow{CB} = \frac{MC}{DC}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{MC}{DC}\overrightarrow{DB}$.

Ainsi, $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires donc (MP) est parallèle à la droite (BD) qui est incluse dans le plan (BFH), ce qui prouve que $(MP) /\!/ (BFH)$ et donc que $\overrightarrow{MP}$ est un vecteur du plan (BFH).

→ On en déduit que $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN})$ est une base du plan (BFH).

• Bilan : $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN})$ est donc à la fois une base du plan (BFH) et une base du plan (MNP) [car $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont clairement des vecteurs du plan (MNP)] ; cela prouve que $(BFH) /\!/ (MNP)$.