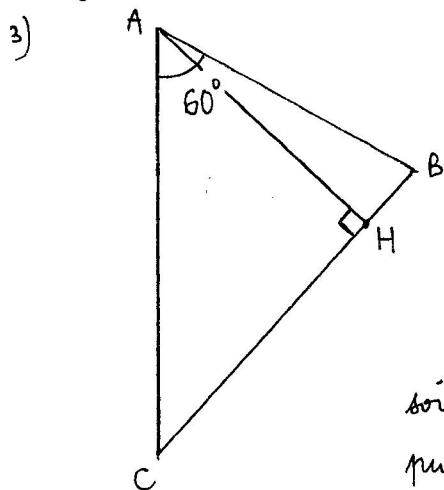


(II) 1) On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$,
soit $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 39 \times 55 \times \cos(60^\circ) = 39 \times 55 \times \frac{1}{2} = 1072,5$

2) On a $BC^2 = \vec{BC}^2 = (\vec{BA} + \vec{AC})^2 = \vec{BA}^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2 = BA^2 + AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
[montrons que cela redémontre la relation d'Al-Kashi: $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$]
et finalement $BC^2 = 39^2 + 55^2 - 2 \times 1072,5 = 2401$, d'où $BC = \sqrt{2401} = 49$ (car $BC > 0$)



3) On a $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \vec{CA} \cdot (\vec{CA} + \vec{AB}) = \vec{CA}^2 + \vec{CA} \cdot \vec{AB}$,
soit $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CA^2 - \vec{AC} \cdot \vec{AB} = CA^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 55^2 - 1072,5$
et finalement, $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 1952,5$.

On a également $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \vec{CH} \cdot \vec{CB}$ (car $\vec{CH}$ est le projeté orthogonal de $\vec{CA}$ sur la direction de $\vec{CB}$),
soit $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CH \times CB$. On en déduit que $CH \times CB = 1952,5$
puis que $CH = \frac{1952,5}{CB} = \frac{1952,5}{49} = \frac{3905}{98} \approx 39,85$

• D'après le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle AHC, rectangle en H, on a $AH^2 = AC^2 - CH^2 = 55^2 - \left(\frac{3905}{98}\right)^2 = \frac{13\,803\,075}{9604}$, d'où

$$AH = \sqrt{\frac{13\,803\,075}{9604}} = \frac{2145\sqrt{3}}{98} \approx 37,91$$

4) On a $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CA \times CB \times \cos(\widehat{ACB})$, soit $1952,5 = 55 \times 49 \times \cos \hat{C}$,
d'où $\cos \hat{C} = \frac{1952,5}{55 \times 49} = \frac{71}{98}$. La calculatrice fournit $\hat{C} \approx 43,57^\circ$.

On en déduit que $\hat{B} \approx 180^\circ - (60^\circ + 43,57^\circ) = 76,43^\circ$

(III) 1) On a $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (\vec{AI} + \vec{IB}) \cdot (\vec{AI} + \vec{IC}) = \vec{AI}^2 + \vec{AI} \cdot \vec{IC} + \vec{AI} \cdot \vec{IB} + \vec{IB} \cdot \vec{IC}$,
soit $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 + \vec{AI} \cdot (\vec{IB} + \vec{IC}) - \vec{IC} \cdot \vec{IC}$ car $\vec{IB} = -\vec{IC}$, vu que I est le milieu du segment [BC]. Finalement $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 - \vec{IC}^2 = 8^2 - IC^2 = 8^2 - 5^2$
(car $IC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ vu que I est le milieu de [BC]), soit $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 39$

2) On a $AC^2 = \vec{AC}^2 = (\vec{AB} + \vec{BC})^2 = \vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC}^2$; on en déduit que
 $AC^2 = AB^2 + 2\vec{AB} \cdot (\vec{BA} + \vec{AC}) + BC^2 = AB^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BA} + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + BC^2$
 $\quad \quad \quad - \vec{AB}^2$

d'où $AC^2 = BC^2 - AB^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
 $= 10^2 - 6^2 + 2 \times 39 = 142$, ce qui donne $AC = \sqrt{142}$ (vu que $AC > 0$).