

Exercice 1

(A) 1)

$$2) p(C \cap H) = p(C) \times p_C(H) = 0,3 \times 0,459 = 0,1377$$

3) D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition (C, S, E) de l'univers, on a :

$$p(H) = p(C \cap H) + p(S \cap H) + p(E \cap H), \text{ soit :}$$

$$p(H) = p(C) \times p_C(H) + p(S) \times p_S(H) + p(E) \times p_E(H),$$

$$\text{d'où } p(H) = 0,3 \times 0,459 + 0,5 \times 0,8 + 0,2 \times 0,25 = 0,5877$$

$$4) p_H(S) = \frac{p(S \cap H)}{p(H)} = \frac{p(S) \times p_S(H)}{p(H)} = \frac{0,5 \times 0,8}{0,5877} \approx 0,681$$

(B) 1) Méthode n°1 (qui nécessite de connaître son cours sur le bout des doigts)

Comme $\mu = 4000$ et $\sigma = 300$, $p(3400 \leq X \leq 4600) = p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$

Méthode n°2 (qui nécessite de savoir utiliser sa calculatrice)

On obtient directement $p(3400 \leq X \leq 4600) \approx 0,954$, en saisissant sur la calculatrice : `normalFRép(3400, 4600, 4000, 300)`.

2) Méthode n°1 (la plus "rigoureuse")

$$\text{On a } p(X \geq 4500) = \underbrace{p(X \geq 4000)}_{0,5} - \underbrace{p(4000 \leq X \leq 4500)}_{\text{normalFRép}(4000, 4500, 4000, 300)} \approx 0,048$$

Méthode n°2 (moins "rigoureuse")

$p(X \geq 4500) = p(X \in [4500; +\infty[)$ peut être estimé en saisissant sur la calculatrice : `normalFRép(4500, 10^99, 4000, 300)` soit $p(X \geq 4500) \approx 0,048$.

(C) Sous l'hypothèse "50% des arbres dans la forêt sont des sapins" ($p = 0,5$), l'intervalle de fluctuation asymptotique (au seuil de 95%) de la fréquence des sapins dans un échantillon de 200 arbres, est :

$$I \approx \left[0,5 - 1,96 \frac{\sqrt{0,5(1-0,5)}}{\sqrt{200}} ; 0,5 + 1,96 \frac{\sqrt{0,5(1-0,5)}}{\sqrt{200}} \right], \text{ soit } I \approx [0,43 ; 0,57].$$

La fréquence observée sur l'échantillon est $f_{\text{obs}} = \frac{106}{200} = 0,53$.

Comme $f_{\text{obs}} \in I$, on valide l'hypothèse $p = 0,5$ au seuil de 95% (et on ne remet donc pas en cause l'affirmation de l'exploitant).

Exercice 2 1) Notons que $\vec{FL}$ et $\vec{FE}$ sont colinéaires, donc $L \in (EF)$.

- L et M appartiennent au plan (BDL)
 - $L \in (EF)$ et $(EF) \subset (EFH)$ donc $L \in (EFH)$
 - $M \in (EH)$ et $(EH) \subset (EFH)$ donc $M \in (EFH)$
 - B et D appartiennent aux deux plans sécants (BDL) et (ABD), donc $(BDL) \cap (ABD) = (BD)$
- } L et M appartiennent aux deux plans sécants (BDL) et (EFH)
donc $(BDL) \cap (EFH) = (LM)$

$$\left. \begin{array}{l} (ABD) \parallel (EFH) \\ (BDL) \cap (ABD) = (BD) \\ (BDL) \cap (EFH) = (LM) \end{array} \right\} \text{ donc } (LM) \parallel (BD).$$

$$2) \text{ On a } F \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}. \text{ Donc } \overrightarrow{FL} = \frac{2}{3} \overrightarrow{FE} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L - 6 = \frac{2}{3}(0-6) \\ y_L - 0 = \frac{2}{3}(0-0) \\ z_L - 6 = \frac{2}{3}(6-6) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_L = 6-4=2 \\ y_L = 0+0=0 \\ z_L = 6+0=6 \end{cases}, \text{ d'où } L \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$3) a) \text{ La droite } (BL) \text{ passe par } B \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et est dirigée par } \overrightarrow{BL} \begin{pmatrix} 2-6 \\ 0-0 \\ 6-0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BL} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Une représentation paramétrique de (BL) est donc :

$$\begin{cases} x = 6-4t \\ y = 0+0t \\ z = 0+6t \end{cases} (t \in \mathbb{R}), \text{ soit } \begin{cases} x = 6-4t \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

$$3) b) S \in (BL) \text{ donc il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x_S = 6-4t \\ y_S = 0 \\ z_S = 6t \end{cases}. \text{ Comme } S \in (AK),$$

$$\text{on a } x_S = 0, \text{ donc } 6-4t = 0,$$

$$\text{d'où } t = \frac{3}{2} \text{ et finalement, } \begin{cases} x_S = 0 \\ y_S = 0 \\ z_S = 6 \times \frac{3}{2} = 9 \end{cases}.$$

$$4) a) \text{ On a } \vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BL} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 0-6 \\ 6-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BL} = 3 \times (-4) + 3 \times 0 + 2 \times 6 = 0, \text{ d'où } \vec{n} \perp \overrightarrow{BL},$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 3 \times (-6) + 3 \times 6 + 2 \times 0 = 0, \text{ d'où } \vec{n} \perp \overrightarrow{BD}.$$

$\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDL) ,
ce qui prouve que $\vec{n}$ est normal à (BDL) .

4) b) D'après ce qui précède, (BDL) possède une équation cartésienne de la forme $3x + 3y + 2z + d = 0$. Comme $B \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in (BDL)$, on a $3 \times 6 + 3 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0$, soit $d = -18$, d'où $(BDL): 3x + 3y + 2z - 18 = 0$.

$$4) c) \text{ Comme } M \in (EH), \text{ il existe } s \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = s \\ z_M = 6 \end{cases}. \text{ D'autre part,}$$

$$M \in (BDL) \text{ donc } 3x_M + 3y_M + 2z_M - 18 = 0,$$

$$\text{d'où } 3 \times 0 + 3 \times s + 2 \times 6 - 18 = 0 \Leftrightarrow 3s = 6 \Leftrightarrow s = 2. \text{ Finalement } M \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

5) On a $(AE) \perp (EFH)$, soit $(SE) \perp (ELM)$. $[SE]$ est donc la hauteur issue de S dans le tétraèdre $SELM$.

$$\text{On a donc } V = \frac{1}{3} ES \times \text{aire}(ELM).$$

$$\text{Or } \overrightarrow{ES} \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 9-6 \end{pmatrix} = \overrightarrow{ES} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ donc } ES = \|\overrightarrow{ES}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\overrightarrow{LE} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-0 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \overrightarrow{LE} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } LE = \|\overrightarrow{LE}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\vec{EM} \begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-0 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \vec{EM} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } EM = \|\vec{EM}\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Comme le triangle ELM est rectangle en E, on a $\text{aire}(ELM) = \frac{1}{2} LE \times EM$,

soit $\text{aire}(ELM) = \frac{1}{2} 2 \times 2 = 2$, d'où $V = \frac{1}{3} \times 3 \times 2 = 2$.

6) On a $\vec{LE} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{LS} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-0 \\ 9-6 \end{pmatrix} = \vec{LS} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $\vec{LS} \cdot \vec{LE} = (-2) \times (-2) + 0 \times 0 + 3 \times 0 = 4$

D'autre part, $LS = \|\vec{LS}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ et $\vec{LS} \cdot \vec{LE} = LS \times LE \times \cos \widehat{SLE}$,
donc $\cos \widehat{SLE} = \frac{\vec{LS} \cdot \vec{LE}}{LS \times LE} = \frac{4}{\sqrt{13} \times 2} = \frac{2}{\sqrt{13}} \approx 0,5547$.

(Or $\cos 55^\circ \approx 0,5736$ et $\cos 60^\circ = 0,5$ donc $\cos 60^\circ < \cos \widehat{SLE} < \cos 55^\circ$,

ce qui prouve que $55^\circ < \widehat{SLE} < 60^\circ$, par décroissance de la fonction $\cos$ sur $[0; \pi]$

• Exercice 3 (A) 1) Soit $x \in \mathbb{R}$; on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $-1 \leq -\cos x \leq 1$ (1)

On a aussi $-1 \leq \sin x \leq 1$ (2). En additionnant membre à membre les inégalités (1) et (2), on obtient $-2 \leq -\cos x + \sin x \leq 2$, d'où

$1 + (-2) \leq 1 - \cos x + \sin x \leq 1 + 2$, soit $-1 \leq 1 - \cos x + \sin x \leq 3$ et

finalement $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$ (en multipliant chaque membre par e^{-x} , qui est strictement positif).

2) On a $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ donc par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, puis par produit,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) = -0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3e^{-x}) = 3 \times 0 = 0$. Comme on a

$\forall x \in \mathbb{R}, -e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$, le théorème des gendarmes prouve que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

3) $f: x \mapsto \underbrace{e^{-x}}_{u(x)} \underbrace{(-\cos x + \sin x + 1)}_{v(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition,

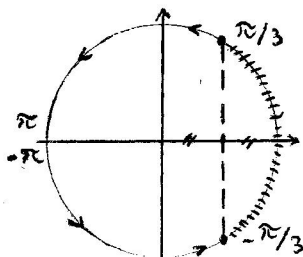
somme et produit et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = \underbrace{-e^{-x}}_{u'(x)} \underbrace{(-\cos x + \sin x + 1)}_{v(x)} + \underbrace{e^{-x}}_{u(x)} \underbrace{(\sin x + \cos x)}_{v'(x)}$, soit

$f'(x) = e^{-x} (\cos x - \sin x - 1 + \sin x + \cos x) = e^{-x} (2\cos x - 1)$.

4) a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x} (2\cos x - 1)$ donc comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2\cos x - 1$. Or, si $x \in [-\pi; \pi]$, $2\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$



x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π	
$f'(x)$	-	○	+	○	-
f					

(B) 1) Si $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) + e^{-x} \cos x$
 $= e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1 + \cos x)$
 $= e^{-x}(\sin x + 1).$

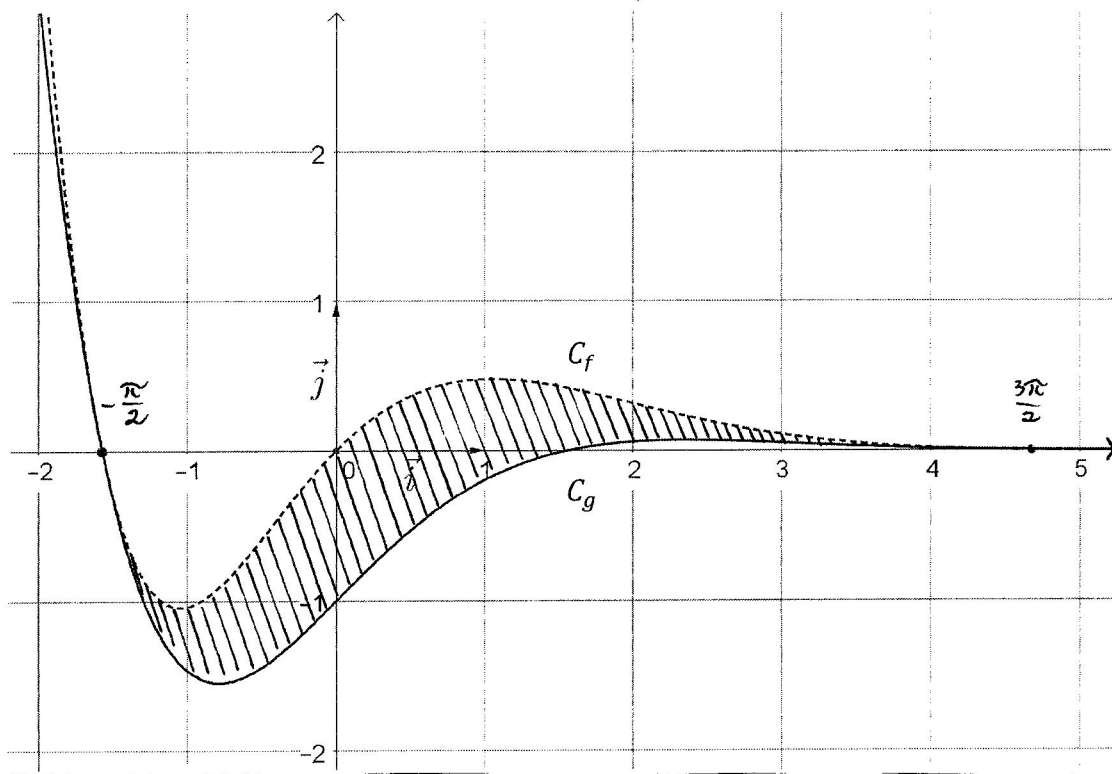
On a $\sin x \geq -1$ donc $\sin x + 1 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$. Comme $e^{-x} > 0$, on a $f(x) - g(x) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$. Ainsi C_f est toujours au dessus de C_g (et coïncident lorsque $x \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$).

2) Comme on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq g(x)$, l'aire du domaine D est égale (en unités d'aire) à $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [f(x) - g(x)] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + 1)e^{-x} dx$, soit

$$I = \left[H(x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \left(-\frac{\cos \frac{3\pi}{2}}{2} - \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{2} - 1 \right) e^{-\frac{3\pi}{2}} - \left(-\frac{\cos(-\frac{\pi}{2})}{2} - \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{2} - 1 \right) e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(0 + \frac{1}{2} - 1 \right) e^{-\frac{3\pi}{2}} - \left(0 + \frac{1}{2} - 1 \right) e^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{3\pi}{2}}.$$

L'unité graphique étant de 2 cm, l'unité d'aire est de 4 cm², donc l'aire du domaine vaut $4 \left(\frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{3\pi}{2}} \right) \text{ cm}^2$, soit $2 \left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{3\pi}{2}} \right) \text{ cm}^2 \approx 9,6 \text{ cm}^2$.



- Exercice 4 1) Le 31 octobre 2017, il y a $3000 + 80 = 3080$ cétacés. Puis après une baisse de 5%, il y a $0,95 \times 3080 = 2926$ cétacés le 1^{er} juin 2018: $u_1 = 2926$.
- 2) Le 31 octobre 2017 + n, il y a $u_n + 80$ cétacés. Puis après une baisse de 5%, il y a $0,95 \times (u_n + 80) = 0,95 u_n + 76$ cétacés le 1^{er} juin 2018 + n, ce qui prouve que $u_{n+1} = 0,95 u_n + 76$
- 3) $\boxed{= B2 * 0,95 + 76}$

4)a) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_n \geq 1520$.

• On a $u_0 = 3000 \geq 1520$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$;

on a $u_n \geq 1520$ donc $0,95 u_n \geq 0,95 \times 1520$ (car $0,95 > 0$), d'où $0,95 u_n \geq 1444$, et enfin $0,95 u_n + 76 \geq 1444 + 76$, soit $u_{n+1} \geq 1520$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• Cela prouve par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1520$.

4)b) Si $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0,95 u_n + 76 - u_n = 76 - 0,05 u_n$. Or $u_n \geq 1520$,

donc $-0,05 u_n \leq \underbrace{-0,05 \times 1520}_{-76}$ (car $-0,05 < 0$), d'où $76 - 0,05 u_n \leq 0$, soit

$u_{n+1} - u_n \leq 0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$, ce qui prouve la décroissance de (u_n) .

4)c) La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 1520), donc elle converge (voir théorème "de convergence monotone").

5)a) Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 1520 = 0,95 u_n + 76 - 1520 = 0,95 u_n - 1444$,

d'où $v_{n+1} = 0,95 \left(u_n - \frac{1444}{0,95} \right) = 0,95 (u_n - 1520)$, soit $v_{n+1} = 0,95 v_n$, ce qui

prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de terme initial

$v_0 = u_0 - 1520 = 3000 - 1520 = 1480$.

5)b) On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times 0,95^n = 1480 \times 0,95^n$. Or $v_n = u_n - 1520$,

donc $u_n = v_n + 1520 = 1480 \times 0,95^n + 1520$.

5)c) Comme $0,95 \in]-1; 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$ donc par produit et somme,

(u_n) converge vers $1480 \times 0 + 1520 = 1520$.

6) $n \leftarrow 0$
 $u \leftarrow 3000$
Tant que $u \geq 2000$
 $n \leftarrow n+1$
 $u \leftarrow 0,95 u + 76$
Fin Tant que

Remarque: cet algorithme détermine l'année à partir de laquelle le nombre de citadins devient strictement inférieur à 2000.

7) Soit $n \in \mathbb{N}$; $u_n < 2000 \Leftrightarrow 1480 \times 0,95^n + 1520 < 2000$

$$\Leftrightarrow 1480 \times 0,95^n < 480$$

$$\Leftrightarrow 0,95^n < \frac{480}{1480} = \frac{12}{37}$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,95) < \ln \frac{12}{37}$$

$$\Rightarrow n > \underbrace{\frac{\ln \frac{12}{37}}{\ln 0,95}}_{\approx 21,95}$$

$$\Rightarrow n \geq 22 \text{ car } n \text{ est entier}$$

Remarque:

$$\ln[0,95^n] = n \ln 0,95$$

car $1480 > 0$

car $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

car $\ln 0,95 < 0$, or que $0,95 \in]0; 1[$

La réserve devra donc fermer en $2017 + 22 = 2039$.