Épreuve de Mathématiques

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Février 2017

Durée de l'épreuve : 4 heures

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6. La page n°6 est à rendre, complétée, avec la copie.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Chaque exercice sera traité sur une copie séparée.

Exercice 1 (4 points)

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-4} *près.*

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5 % de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1) On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

2) On choisit successivement et au hasard 1000 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.

- **a)** Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
- **b)** Calculer son espérance mathématique.
- **c)** Déterminer la probabilité qu'aucun animal du troupeau ne soit malade.
- **d)** Déterminer la probabilité que 10 animaux au moins soient malades.

3) On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie » et M l'évènement « être atteint de cette maladie ».

- **a)** Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.
- **b)** Calculer la probabilité de l'évènement T.
- **c)** Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

Exercice 2 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1) **a)** Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

b) Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c) Établir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

2) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a) Établir que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

En déduire une expression de v_n en fonction de n.

c) On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n, et déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 (5 points)

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué **un point par réponse exacte correctement justifiée**. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

Proposition 1

L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2\,\mathrm{i}|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe $3\,\mathrm{i}$.

Proposition 2

Soit (E) l'équation $(z-1)\left(z^2-8z+25\right)=0$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition 3

$\dfrac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8$.

Proposition 4

Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et $3\,\mathrm{i}$.

L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle en A avec $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ est $1-4\,\mathrm{i}$.

Proposition 5

On considère la suite de nombres complexes $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $Z_n = (1+\mathrm{i})^n$. On note M_n le point d'affixe Z_n.

Pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Exercice 4 (6 points)

⚠ ***On joindra à la copie la page n°6 avec le tableau complété et le numéro d'anonymat renseigné.***

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1) Étude d'une fonction auxiliaire

a) Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.

Étudier le sens de variation de la fonction g.

b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

Déterminer un encadrement au millième de a.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2) Étude de la fonction f

a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

e) Justifier que $3{,}43 < m < 3{,}45$.

3) Algorithme

On donne l'algorithme ci-dessous :

Variables	a, b, c nombres réels ; g fonction
Initialisation	a prend la valeur 0 b prend la valeur 1
Traitement	Tant que $b - a > 0{,}1$ faire c prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$ Si $g(a) \times g(c) \geqslant 0$ alors a prend la valeur c Sinon b prend la valeur c Fin si Fin Tant que
Sortie	Afficher a Afficher b

a) Compléter le tableau suivant, qui décrit le fonctionnement de l'algorithme.

Étape	c	$g\,(a)^{\star}$	$g\,(c)^{\star}$	Test $g\,(a) \times g\,(c) \geqslant 0$?	a	b	Test $b - a > 0{,}1$?
Initialisation	///////	///////	///////	///////			oui
Étape 1							
Étape 2							
Étape 3							
....							
....							

$^{(\star)}$ Arrondir $g(a)$ et $g(c)$ à 10^{-2} près.

b) Donner la finalité de cet algorithme, et interpréter son affichage de sortie.

Numéro d'anonymat : _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _