1) Pour tout l'exercice nous noterons :

V l'évènement « le poisson est en vie un mois après l'achat »

$E1$ (resp. $E2$) l'évènement « le poisson provient de l'élevage 1 » (resp. élevage 2)

R (resp. G) l'évènement « la couleur définitive est rouge » (resp. grise)

a) Les évènements $E1$ et $E2$ forment une partition de l'univers. D'après les probabilités totales,

$$p(V)=p(V\cap E1)+p(V\cap E2)$$
$$=p(E1)\times p_{E1}(V)+p(E2)\times p_{E2}(V)$$
$$=0.6\times 0.9+0.4\times 0.95 \quad =0.92$$

La probabilité que le poisson soit vivant est donc 0.92

Profitons en pour remarquer que la probabilité que le poisson meure est 0.08 puisque les évènements « poisson vivant » et « poisson mort » sont complémentaires.

b) De même, $p(R)=p(R\cap E1)+p(R\cap E2)$
$$=p(E1)\times p_{E1}(R)+p(E2)\times p_{E2}(R)$$
$$=0.6\times 0.75+0.4\times 0.65 \quad =0.71$$

La probabilité que le poisson soit rouge est donc 0.71

c) $p_G(E1)=p(G\cap E1)/p(G)$. Il nous faut donc calculer la probabilité que le poisson soit gris

$$p(G)=p(G\cap E1)+p(G\cap E2) \quad = \quad p(E1)\times p_{E1}(G)+p(E2)\times p_{E2}(G)$$
$$=0.6\times 0.15+0.4\times 0.3 \quad =0.21$$

Vérifions nos probabilités : les évènements Rouge et Gris forment une partition de l'évènement Vivant, et la somme des probabilités $p(R)+p(G)$ est bien égale à $p(V)$.

Alors, $p_G(E1)=p(G\cap E1)/p(G)=p_{E1}(G)p(E1)/p(G)=0.15\times 0.6\div 0.21\approx 0.42857$

La probabilité qu'il provienne de l'élevage 1 sachant qu'il est gris est 0.43 à 10^{-2} près.

2) Notons Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de poissons en vie. Cette variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres 5 (nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes) et 0.92 (probabilité de succès, donc de survie du poisson)

$$p(Y=3)=\binom{5}{3}\times 0.92^3\times 0.08^2=10\times 0.92^3\times 0.08^2\approx 0.049836 \text{ arrondi à } 0.05$$

$$p(Y\geq 3)=\sum_{k=3}^{5}\binom{5}{k}\times 0.92^k\times 0.08^{5-k}=1-p(Y\leq 2)\approx 0.99547 \text{ arrondi à } 0.995$$

3) a) Le gain réalisé par l'animalerie est 1 si le poisson est rouge, 0.25 s'il est gris et -0.1 s'il meurt.

La loi de probabilité de X est : $p(X=1)=0.71 \quad p(X=0.25)=0.21 \quad p(X=-0.1)=0.08$

Donc $E(X)=0.71\times 1+0.21\times 0.25-0.08\times 0.1=0.7545$ soit 75 centimes au centime près.

b) Il faudrait réaliser un bénéfice de 76 centimes minimum par poisson de deux mois.