Correction du contrôle de Mathématiques (03/02/17)

Exercice I

1. On a $Z=\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{2,08+1,98\,\mathrm{i}-(-2+3\,\mathrm{i})}{-3-\mathrm{i}-(-2+3\,\mathrm{i})}=\dfrac{4,08-1,02\,\mathrm{i}}{-1-4\,\mathrm{i}}=\dfrac{1,02\,\mathrm{i}(-4\,\mathrm{i}-1)}{-4\,\mathrm{i}-1}$, soit $Z=1,02\,\mathrm{i}=1,02\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.
2. On en déduit que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg\left(1,02\,\mathrm{i}\right)=\dfrac{\pi}{2}$, ce qui entraîne que ABC est un triangle rectangle en A. D'autre part, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{|z_C-z_A|}{|z_B-z_A|}=\left|1,02\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right|=1,02\neq 1$, ce qui prouve que ABC n'est pas isocèle.

Exercice II

1. $f\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)=\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2+2\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)+9=1-2\,\mathrm{i}\sqrt{3}-3-2+2\,\mathrm{i}\sqrt{3}+9=5.$
2. On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=5$:

   $f(z)=5\iff z^2+2z+9=5\iff z^2+2z+4=0\,;\ \Delta=4-16=-12=-\left(2\sqrt{3}\right)^2$.

   Donc l'équation admet deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-2+2\,\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

   On appelle A le point d'affixe $z_A=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $z_B=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

   $|z_A|=\sqrt{1+3}=2$. Soit θ_A un argument de z_A :

   $$\left.\begin{array}{l}\cos\theta_A=\dfrac{\mathrm{Re}(z_A)}{|z_A|}=-\dfrac{1}{2}\\[2ex] \sin\theta_A=\dfrac{\mathrm{Im}(z_A)}{|z_A|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Longrightarrow\theta_A=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\text{ où }k\in\mathbb{Z}.\ \text{Donc }z_A=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

   Les nombres complexes z_A et z_B sont conjugués, donc ils ont le même module et des arguments opposés donc $z_B=2\,\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

   $|z_A|=2$ donc le point A se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 2. De plus la partie réelle de A vaut -1 donc A se trouve sur la droite d'équation $x=-1$. Idem pour B. **Voir graphique à la fin**.
3. On a $\dfrac{z_B-2}{z_A-2}=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}-2}{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}-2}=\dfrac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}=\dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}=\dfrac{(3+\mathrm{i}\sqrt{3})^2}{(3-\mathrm{i}\sqrt{3})(3+\mathrm{i}\sqrt{3})}=\dfrac{9+6\,\mathrm{i}\sqrt{3}+(\mathrm{i}\sqrt{3})^2}{9-(\mathrm{i}\sqrt{3})^2}=\dfrac{9+6\,\mathrm{i}\sqrt{3}-3}{9+3}=\dfrac{6+6\,\mathrm{i}\sqrt{3}}{12}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, soit $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   On en déduit que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\arg\left(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ et que $\dfrac{CB}{CA}=\dfrac{|z_B-z_C|}{|z_A-z_C|}=\left|e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right|=1$, ce qui prouve que ABC est un triangle équilatéral.
4. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z)=\lambda$ d'inconnue z.

   $f(z)=\lambda\iff z^2+2z+9=\lambda\iff z^2+2z+9-\lambda=0.$

   Pour que l'équation $f(z)=\lambda$ admette deux solutions complexes conjuguées, il faut et il suffit que le discriminant du polynôme $z^2+2z+9-\lambda$ soit strictement négatif.

   $\Delta=4-4(9-\lambda)=4-36+4\lambda=4\lambda-32\,;\ \Delta<0\iff 4\lambda-32<0\iff\lambda<8.$

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées est l'intervalle $]-\infty\,;\,8[$.

5. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|f(z) - 8| = 3$.

   $f(z) - 8 = z^2 + 2z + 9 - 8 = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$; donc $|f(z) - 8| = |(z+1)^2| = |z+1|^2$ car le module d'un carré est égal au carré du module.

   Donc $|f(z) - 8| = 3 \iff |z+1|^2 = 3 \iff |z+1| = \sqrt{3}$.

   Soit Ω le point d'affixe -1, donc de coordonnées $(-1\,;\,0)$; si on appelle M le point d'affixe z, alors $|z+1| = \sqrt{3} \iff |z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$.

   L'ensemble des points M tels que $|z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$. Notons que (F) contient A car d'après 1), $f(z_A) = 5$ donc $|f(z_A) - 8| = |-3| = 3$.

6. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + y\,\mathrm{i}$ où x et y sont des nombres réels.

   (a) $f(z) = z^2 + 2z + 9 = (x + y\,\mathrm{i})^2 + 2(x + y\,\mathrm{i}) + 9 = x^2 + 2xy\,\mathrm{i} - y^2 + 2x + 2y\,\mathrm{i} + 9$
   $= x^2 - y^2 + 2x + 9 + (2xy + 2y)\,\mathrm{i}$

   Notons qu'il s'agit bien de la forme algébrique de z car $x^2 - y^2 + 2x + 9$ et $2xy + 2y$ sont réels (vu que x et y le sont).

   (b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

   $f(z)$ réel $\iff 2xy + 2y = 0 \iff 2y(x+1) = 0 \iff y = 0$ ou $x = -1$.

   Donc (E) est la réunion de deux droites D_1 d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) et D_2 d'équation $x = -1$.