Contrôle de Mathématiques

I On se place dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

On considère les points $\mathrm{A}(-2\,;\,3)$, $\mathrm{B}(-3\,;-1)$ et $\mathrm{C}(2,08\,;\,1,98)$.

1) Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe $Z = \dfrac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}$.

2) Le triangle ABC est-il rectangle ? Isocèle ? On justifiera précisément.

II On se place dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z, associe :

$$f(z) = z^2 + 2z + 9\,.$$

1) Calculer l'image de $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.

Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

Construire alors, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).

On laissera les traits de construction apparents.

3) Soit C le point d'affixe 2. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - 2}{z_{\mathrm{A}} - 2}$.
Quelle conclusion géométrique peut-on en tirer ? On justifiera précisément.

4) Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$, d'inconnue z.

Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

5) Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie :

$$|f(z) - 8| = 3\,.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
Tracer (F) sur le graphique.

6) Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + y\,\mathrm{i}$, où x et y sont des nombres réels.

a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est :

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + (2xy + 2y)\,\mathrm{i}\,.$$

b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

Compléter le graphique en traçant ces droites.