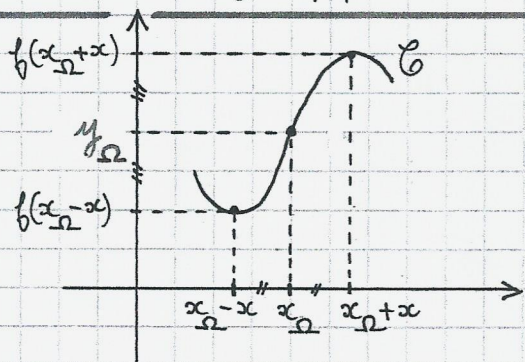


TS - Correction des exercices à chercher pour vendredi 12/01/2018

[B.1) Si $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + g(-x) = \frac{3e^{-x/2} - 1}{e^{-x/2} + 1} + \frac{3e^{x/2} - 1}{e^{x/2} + 1} = \frac{(3e^{-x/2} - 1)e^{x/2}}{(e^{-x/2} + 1)e^{x/2}} + \frac{3e^{x/2} - 1}{e^{x/2} + 1}$,
 soit $g(x) + g(-x) = \frac{3 - e^{x/2}}{1 + e^{x/2}} + \frac{3e^{x/2} - 1}{1 + e^{x/2}} = \frac{2e^{x/2} + 2}{e^{x/2} + 1} = \frac{2(e^{x/2} + 1)}{e^{x/2} + 1} = 2$.

RAPPEL : soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé. Le point Ω est centre de symétrie pour $\mathcal{C}$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x_{\Omega} - x) + f(x_{\Omega} + x)}{2} = y_{\Omega}$$



On a $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) + g(x) = 2$, soit $\frac{g(0-x) + g(0+x)}{2} = 1$, ce qui prouve (voir rappel) que $\mathcal{C}$ admet $\Omega(0; 1)$ pour centre de symétrie.

• 2) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, produit, somme et quotient et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{-\frac{3}{2}e^{-x/2}(e^{-x/2} + 1) - (-\frac{1}{2}e^{-x/2})(3e^{-x/2} - 1)}{(e^{-x/2} + 1)^2},$$

$$\text{soit } g'(x) = \frac{-\frac{3}{2}e^{-x} - \frac{3}{2}e^{-x/2} + \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x/2}}{(e^{-x/2} + 1)^2} = \frac{-2e^{-x/2}}{(e^{-x/2} + 1)^2}. \text{ Comme } e^{-x/2} > 0 \text{ et}$$

$(e^{-x/2} + 1)^2 > 0$, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) < 0$, ce qui montre que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	
g	3	-1

• On a $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{3e^{-\frac{x}{2}} - 1}{e^{-\frac{x}{2}} + 1}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{x}{2}) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0$ par composition.

On en déduit par produit, somme et quotient que

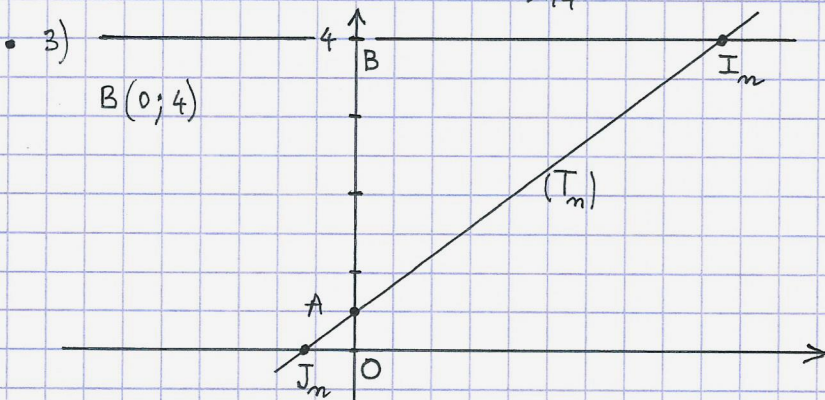
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{3 \times 0 - 1}{0 + 1} = -1$$

• On a $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{(3e^{-\frac{x}{2}} - 1)e^{\frac{x}{2}}}{(e^{-\frac{x}{2}} + 1)e^{\frac{x}{2}}} = \frac{3 - e^{\frac{x}{2}}}{1 + e^{\frac{x}{2}}}$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0$. Cela entraîne, par

somme et quotient que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{3 - 0}{1 + 0} = 3$.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a $f_n(0) = \frac{4e^0}{e^0+7} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ donc la représentation graphique $\mathcal{C}_n$ de f_n passe par le point $A(0; \frac{1}{2})$.
- 2) a) $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x+7} = \frac{4e^x e^{-x}}{(e^x+7)e^{-x}} = \frac{4e^0}{e^0+7e^{-x}} = \frac{4}{1+7e^{-x}}$.
- 2) b) - On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc par produit somme et quotient: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \frac{4 \times 0}{0+7} = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y=0$ (c'est-à-dire l'axe des abscisses) est asymptote à $\mathcal{C}_1$ en $-\infty$.
- D'après la question précédente, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{4}{1+\frac{7}{e^x}}$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc par quotient et somme: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \frac{4}{1+0} = 4$, ce qui prouve que la droite d'équation $y=4$ est asymptote à $\mathcal{C}_1$ en $+\infty$.
- 2) c) f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$, par produit, somme et quotient et pour tout réel x :
$$f_1'(x) = \frac{4e^x(e^x+7) - 4e^x \times e^x}{(e^x+7)^2} = \frac{4e^{2x} + 28e^x - 4e^{2x}}{(e^x+7)^2} = \frac{28e^x}{(e^x+7)^2}$$
. Comme $28 > 0, e^x > 0$ et $(e^x+7)^2 > 0$, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) > 0$ et donc que f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 2) d) On a $T_1: y = f_1'(0)(x-0) + f_1(0)$, avec $f_1(0) = \frac{1}{2}$ et $f_1'(0) = \frac{28e^0}{(e^0+7)^2} = \frac{28}{8^2}$, soit $f_1'(0) = \frac{28}{64} = \frac{7}{16}$. Donc $T_1: y = \frac{7}{16}x + \frac{1}{2}$.
- 2) e) - L'abscisse x du point I_1 vérifie l'équation $4 = \frac{7}{16}x + \frac{1}{2}$, d'où $\frac{7}{16}x = \frac{7}{2}$ et $x = \frac{7}{2} \times \frac{16}{7} = 8$. On a donc $I_1(8; 4)$.
- L'abscisse x du point J_1 vérifie l'équation $0 = \frac{7}{16}x + \frac{1}{2}$, soit $\frac{7}{16}x = -\frac{1}{2}$, d'où $x = -\frac{1}{2} \times \frac{16}{7}$, soit $x = -\frac{8}{7}$. On a donc $J_1(-\frac{8}{7}; 0)$.
- 2) f) On a $AI_1^2 = (x_{I_1} - x_A)^2 + (y_{I_1} - y_A)^2 = (8-0)^2 + (4-\frac{1}{2})^2 = 64 + \frac{49}{4} = \frac{305}{4}$, d'où $AI_1 = \frac{\sqrt{305}}{2}$.
D'autre part, $AJ_1^2 = (x_{J_1} - x_A)^2 + (y_{J_1} - y_A)^2 = (-\frac{8}{7}-0)^2 + (0-\frac{1}{2})^2 = \frac{64}{49} + \frac{1}{4} = \frac{305}{196}$, d'où $AJ_1 = \frac{\sqrt{305}}{14}$.
On en déduit que $\frac{AI_1}{AJ_1} = \frac{\frac{\sqrt{305}}{2}}{\frac{\sqrt{305}}{14}} = \frac{14}{2} = 7$.



D'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{AI_1}{AJ_1} = \frac{AB}{AO} = \frac{3,5}{0,5} = 7.$$

Le rapport $\frac{AI_n}{AJ_n}$ est donc constant (il ne dépend pas de l'entier n).