# Devoir de Mathématiques

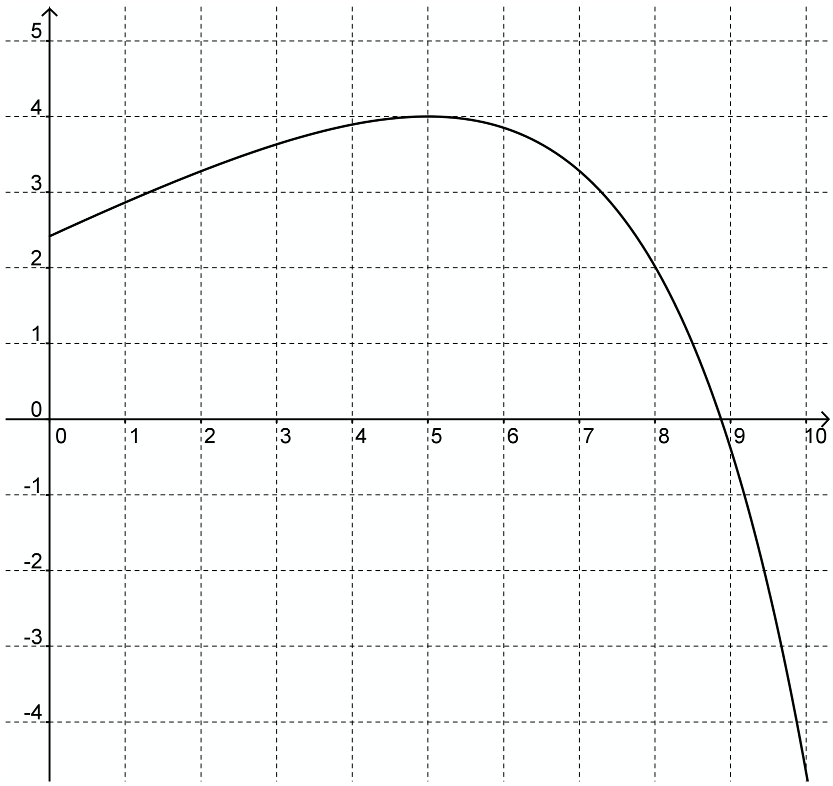
*À rendre lundi 5 mars*

Le but de l'exercice est d'étudier la suite $(u_n)$ définie par son terme initial $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 5}{2} - \mathrm{e}^{\frac{u_n - 5}{2}}$.

**I** Soit $f$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+5}{2} - \mathrm{e}^{\frac{x-5}{2}}$.

**1)** Déterminer les variations de $f$ sur $[0;+\infty[$.

**2)** On a représenté ci-dessous le graphe de la fonction $f$. L'utiliser pour représenter sur l'axe $(\mathrm{O}x)$ les points d'abscisses $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$. Que peut-on conjecturer quant au comportement de la suite $(u_n)$ ?




**II** Soit $g$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

**1)** Dresser le tableau des variations de $g$ sur $[0;+\infty[$.

**2)** Démontrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution $\beta$ dans $[0;+\infty[$ ; donner un encadrement d'amplitude $0,01$ de $\beta$.

**III** **1)** Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \beta$ .

**2)** Prouver que la suite $(u_n)$ converge vers $\beta$.