

T.V.I. : exercice

Le but de l'exercice est d'étudier les variations de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x^3 - 7x - 21)\sqrt{x}.$$

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - 3x - 3$.
 - (a) Dresser le tableau des variations de h sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
À l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
 - (c) En déduire le tableau des signes de h sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Établir que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{7h(x)}{2\sqrt{x}}$.
 - (b) Dresser alors le tableau des variations de f sur $[0; +\infty[$.
 - (c) Montrer que f possède un minimum sur $[0; +\infty[$, égal à $-2(2\alpha + 9)\sqrt{\alpha}$.

↪ **CORRECTION :**

1)a) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme et pour tout réel x , $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$. On en déduit :

x	$-\infty$	-1	1	α	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - 1$	$-$		$-$	0	$+$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
h	$-\infty$	-1	-5	0	$+\infty$

((détails : $h(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) - 3 = -1$ et $h(1) = 1^3 - 3 \times 1 - 3 = -5$))

Si $x \neq 0$, on a $h(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$. Par produit et somme, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$ et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, on obtient par produit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$.

De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, on déduit par produit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

1)b) • D'après son tableau des variations, la fonction h possède un maximum égal à -1 sur $] -\infty; 1]$. Par conséquent, pour tout $x \leq 1$, on a $h(x) \leq -1 < 0$, ce qui entraîne que l'équation $h(x) = 0$ ne possède aucune solution dans $] -\infty; 1]$.

• La fonction h est continue (car dérivable, cf 1.a.) et strictement croissante sur $]1; +\infty[$;

on a : $h(1) = -5$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$, donc $0 \in]h(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[$ et d'après le corollaire du T.V.I., l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution α dans $]1; +\infty[$.

• Bilan : l'équation $h(x) = 0$ possède pour unique solution α dans $\mathbb{R}$.

La calculatrice fournit : $2,1 < \alpha < 2,11$.

1)c) On déduit du tableau des variations de h (complété, cf 1.a.) :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
h	$-$	0	$+$

2)a) $x \mapsto x^3 - 7x - 21$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, par conséquent $f = uv$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ de dérivée $f' = u'v + uv'$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $f'(x) = (3x^2 - 7)\sqrt{x} + (x^3 - 7x - 21) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$, soit :

$$f'(x) = \frac{2(3x^2 - 7)\sqrt{x}^2 + x^3 - 7x - 21}{2\sqrt{x}} = \frac{2x(3x^2 - 7) + x^3 - 7x - 21}{2\sqrt{x}} \text{ et finalement :}$$

$$f'(x) = \frac{6x^3 - 14x + x^3 - 7x - 21}{2\sqrt{x}} = \frac{7x^3 - 21x - 21}{2\sqrt{x}} = \frac{7h(x)}{2\sqrt{x}}.$$

2)b) Comme $7 > 0$ et $2\sqrt{x} > 0$ lorsque $x > 0$, on déduit que f' est du signe de h sur $]0; +\infty[$. D'où, d'après 1.c. :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	0	$f(\alpha)$	$+\infty$

((détail : $f(0) = (0^3 - 7 \times 0 - 21) \times \sqrt{0} = 0$))

Si $x \neq 0$, on a $x^3 - 7x - 21 = x^3 \left(1 - \frac{7}{x^2} - \frac{21}{x^3}\right)$. Par produit et somme, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{7}{x^2} - \frac{21}{x^3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, on obtient par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 7x - 21) = +\infty$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, d'où par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2)c) On a $h(\alpha) = 0$ donc $\alpha^2 - 3\alpha - 3 = 0$, soit $\alpha^3 = 3\alpha + 3$.

Or $f(\alpha) = (\alpha^3 - 7\alpha - 21)\sqrt{\alpha}$, donc $f(\alpha) = (3\alpha + 3 - 7\alpha - 21)\sqrt{\alpha}$, soit :

$$f(\alpha) = (-4\alpha - 18)\sqrt{\alpha} = -2(2\alpha + 9)\sqrt{\alpha}.$$

D'après son tableau des variations (cf 2.b.), f possède donc bien un minimum égal à $-2(2\alpha + 9)\sqrt{\alpha}$ sur $[0; +\infty[$.