Contrôle de Mathématiques

Le but de l'exercice est d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x^2+1}$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + e^{2x}(x^2 - x + 1)$.
   (a) Prouver que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $g(x) = x + (xe^x)^2\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$.
   En déduire la limite de g en $-\infty$.
   (d) Dresser le tableau des variations de g sur $\mathbb{R}$. Établir qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$, puis prouver que $-1 < \alpha < 0$.
   (e) On souhaite utiliser la méthode de dichotomie pour obtenir un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 0,1. À cette fin, compléter l'algorithme suivant :

```
a ⟵ −1
b ⟵ 0
Tant que(⋆) _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ :
        c ⟵ (a+b)/2
        Si(♮) g(a) × g(c) ⩽ 0, alors :
                _ _ _ _ ⟵ _ _ _ _
        Sinon :
                _ _ _ _ ⟵ _ _ _ _
        Fin Si/Sinon
Fin Tant que
```

   (f) Compléter alors le tableau suivant, jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête (on arrondira les valeurs de $g(a)$ et de $g(c)$ à 10^{-2} près) :

Étape	c	$g(a)$	$g(c)$	Test$^{(\natural)}$?	a	b	Test$^{(\star)}$?
Initialisation					-1	0	oui
Étape 1							
Étape 2							
....							
....							
....							

Quelles sont les valeurs de a et de b en sortie ?

☞

2. (a) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{(x^2+1)^2}$.

   (b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   (c) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right)^2 - \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x^2}}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

   (d) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

   (e) Montrer que f possède un minimum sur $\mathbb{R}$, égal à $-\dfrac{1}{\alpha^2 - \alpha + 1}$.