

(I) 1) Posons  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 3}$  et  $g(x) = \sqrt{x}$ . Si  $x < 0$ , on a  $f(x) = \frac{x^2 + \frac{1}{x}}{1 + 3 \times \frac{1}{x}}$

donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  (par produit, somme et quotient); d'autre part

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , donc par composition  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g[f(x)] = +\infty$ , soit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^3 + 1}{x + 3}} = +\infty.$$

2). Soit  $x \in \mathbb{R}$ ; on a  $\sqrt{9x^2 + 7} \geq 0$  donc  $\sqrt{9x^2 + 7} - 3x \geq -3x$ , soit  $f(x) \geq -3x$ . Par produit, on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x) = +\infty$ , d'où par comparaison,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

• Soit  $x > 0$ ; on a  $f(x) = \frac{(\sqrt{9x^2 + 7} - 3x)(\sqrt{9x^2 + 7} + 3x)}{\sqrt{9x^2 + 7} + 3x}$ , d'où

$$f(x) = \frac{\sqrt{9x^2 + 7}^2 - (3x)^2}{\sqrt{9x^2 + 7} + 3x} = \frac{9x^2 + 7 - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 7} + 3x} = \frac{7}{\sqrt{9x^2 + 7} + 3x} \quad (*)$$

On a  $\sqrt{9x^2 + 7} \geq 0$ , donc  $\sqrt{9x^2 + 7} + 3x \geq 3x$ ; or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x) = +\infty$ ,

d'où par comparaison  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 7} + 3x) = +\infty$  et finalement par

quotient (voir \*),  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

**II** 1)  $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-1}$  n'est défini que lorsque  $x^2 \neq 1$ , c'est-à-dire si  $x \notin \{-1; 1\}$ .  
L'ensemble de définition de  $f$  est donc  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ .

2) On a  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$  (lorsque  $x \neq 0$ )

Par somme, on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = 1 - 0 + 0 = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 - 0 = 1$ .

De même :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = 1 - 0 + 0 = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 - 0 = 1$ .

On déduit par quotient que  $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1}$  et  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1}$ .

$\hookrightarrow$  La droite d'équation  $y=1$  est donc asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

On a  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ , d'où :

| $x$       | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|-----------|-----------|------|-----|-----------|
| $x^2 - 1$ | +         | ○    | ○   | +         |

- On a  $\lim_{x \rightarrow -1} (x-2)^2 = (-1-2)^2 = 9$ .

D'autre part (voir tableau de signes)  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (x^2 - 1) = 0^+$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (x^2 - 1) = 0^-$

d'où par quotient,  $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty}$  et  $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty}$

- On a  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-2)^2 = (1-2)^2 = 1$ .

D'autre part (voir tableau de signes)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^2 - 1) = 0^-$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^2 - 1) = 0^+$

d'où par quotient,  $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty}$  et  $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty}$

$\hookrightarrow$  Les droites d'équations  $x=-1$  et  $x=1$  sont donc asymptotes à  $\mathcal{C}_f$ .

3) Si  $x \in \mathcal{D}$ ,  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  avec  $u(x) = w(x)^2$ , où  $w(x) = x-2$  et  $v(x) = x^2 - 1$ . On a  $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$  et  $u'(x) = 2w'(x)w(x) = 2 \times 1 \times (x-2)$   
d'où  $f'(x) = \frac{2(x-2)(x^2-1) - (x-2)^2 \times 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{(x-2)[2(x^2-1) - 2x(x-2)]}{(x^2-1)^2}$ ,

soit  $f'(x) = \frac{(x-2)(2x^2 - 2 - 2x^2 + 4x)}{(x^2-1)^2} = \frac{(x-2)(4x-2)}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^2 - 10x + 4}{(x^2-1)^2}$

4) Si  $x \in \mathcal{D}$ ,  $(x^2-1)^2 > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $(x-2)(4x-2)$  :

| $x$     | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $2$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|---------------|-----|-----------|
| $x-2$   |           | -             | ○   | +         |
| $4x-2$  | -         | ○             | +   |           |
| Produit | +         | ○             | -   | +         |

$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$4x-2=0 \Leftrightarrow 4x=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

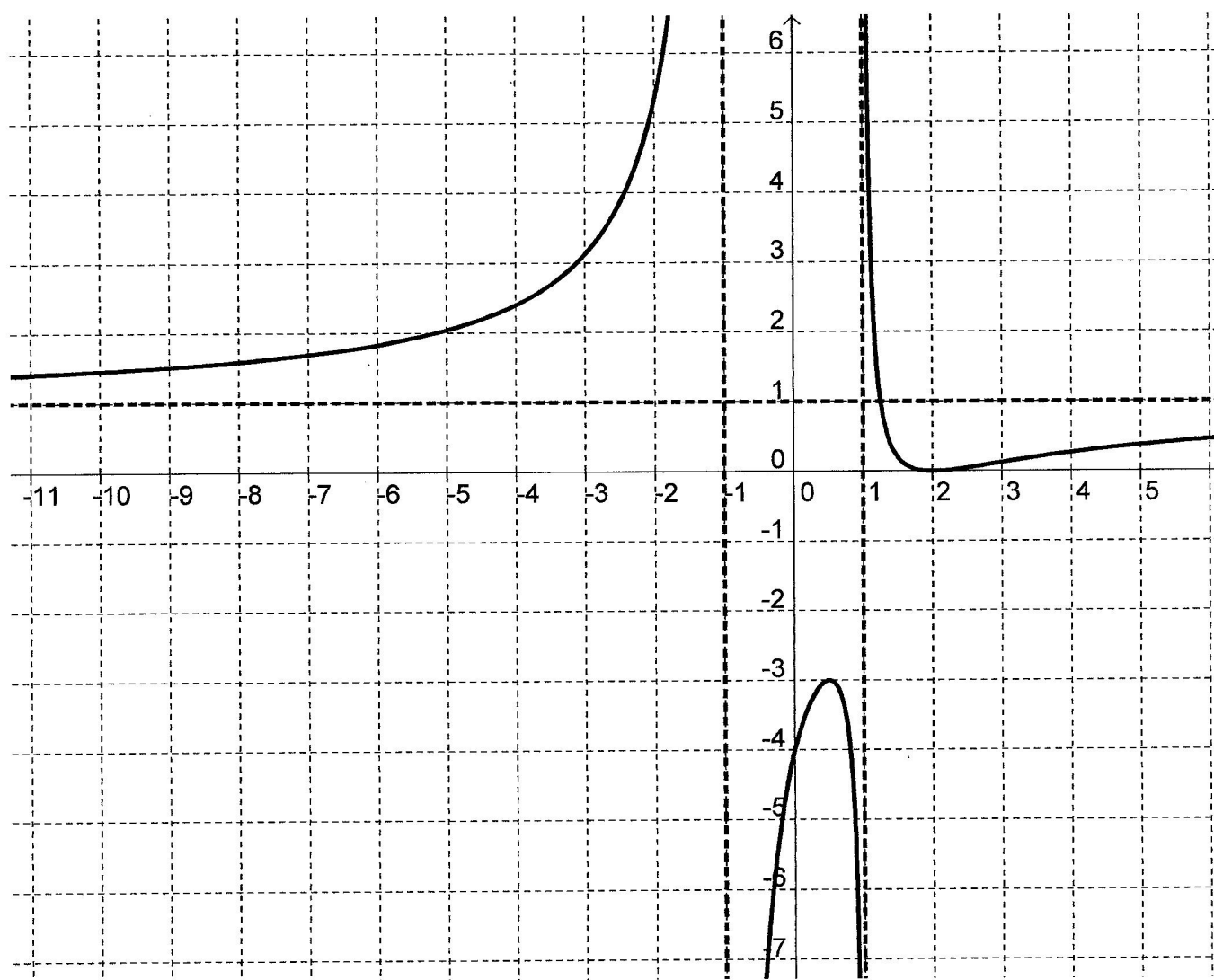
D'où l'on déduit finalement :

Détails :  $f(2) = \frac{(2-2)^2}{2^2-1} = \frac{0}{3} = 0$

et  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}-2\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-1} = \frac{\frac{9}{4}}{-\frac{3}{4}} = -3$

| $x$     | $-\infty$            | $-1$                                        | $\frac{1}{2}$                        | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
|---------|----------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------|-----|-----|-----------|
| $f'(x)$ | $+$                  | $+$                                         | $0$                                  | $-$ | $-$ | $+$       |
| $f$     | $1 \nearrow +\infty$ | $\nearrow -3$<br>$-\infty \searrow -\infty$ | $+\infty \searrow 0$<br>$\nearrow 1$ |     |     |           |

Voici, à titre de curiosité, l'allure du graphe de  $f$  :



(en pointillés gras, les asymptotes)

— • III) 1)a)  $p: x \mapsto x^4 + 4x - 3$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (par produit et somme) de dérivée  $x \mapsto 4x^3 + 4$ . Or si  $x \in \mathbb{R}$ ,  $4(x+1)(x^2-x+1) = 4(x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1)$ , soit  $4(x+1)(x^2-x+1) = 4(x^3+1) = 4x^3+4$ .  
On a donc bien :  $\forall x \in \mathbb{R}, p'(x) = 4(x+1)(x^2-x+1)$ .

1)b) Le trinôme  $x^2-x+1$  a pour discriminant  $\Delta = -3 < 0$  donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $x^2-x+1 > 0$  (du signe de  $a=1$ ). Comme  $4 > 0$ ,  $p'(x)$  est donc du signe de  $x+1$ . D'où :

|         |           |          |      |         |           |
|---------|-----------|----------|------|---------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$ | $-1$ | $\beta$ | $+\infty$ |
| $p'(x)$ |           | +        | 0    | +       |           |
| $p$     | $+\infty$ |          | $-6$ |         | $+\infty$ |

•  $p(-1) = (-1)^4 + 4(-1) - 3 = -6$

• Si  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a  $p(x) = x^4 \left(1 - 4 \times \frac{1}{x} + 3 \times \frac{1}{x^4}\right)$

On a par produit et somme :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - 4 \times \frac{1}{x} + 3 \times \frac{1}{x^4}\right) = 1 - 4 \times 0 + 3 \times 0 = 1 > 0$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 4 \times \frac{1}{x} + 3 \times \frac{1}{x^4}\right) = 1 - 4 \times 0 + 3 \times 0 = 1 > 0$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$ , on obtient par produit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$ .

1)c) •  $p$  est strictement décroissante et continue (car dérivable) sur  $]-\infty; -1]$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty$ ,  $p(-1) = -6$  donc  $0 \in [p(-1); \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)[$  et d'après le corollaire du T.V.I., l'équation  $p(x) = 0$  possède une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $]-\infty; -1]$ .

•  $p$  est strictement croissante et continue (car dérivable) sur  $]-1; +\infty[$ ,  $p(-1) = -6$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$  donc  $0 \in ]p(-1); \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)[$  et d'après le corollaire du T.V.I., l'équation  $p(x) = 0$  possède une unique solution  $\beta$  dans  $]-1; +\infty[$ .

• Bilan : l'équation  $p(x) = 0$  possède exactement deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{R}$ .

La calculatrice fournit:  $-1,79 < \alpha < -1,78$  et  $0,69 < \beta < 0,7$

1) d) En déduisant du tableau des variations de  $p$  (complété), le signe de  $p(x)$ :

|        |           |          |   |         |           |   |
|--------|-----------|----------|---|---------|-----------|---|
| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ |   | $\beta$ | $+\infty$ |   |
| $p(x)$ |           | +        | 0 | -       | 0         | + |

2) a) • Notons que  $x \mapsto x^4 + 1$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  (si  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $x^4 \geq 0$  donc  $x^4 + 1 \geq 1$ ). La fonction  $f: x \mapsto \frac{x^3 + 1}{x^4 + 1}$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  par somme et quotient et:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3x^2(x^4 + 1) - 4x^3(x^3 + 1)}{(x^4 + 1)^2} = \frac{3x^6 + 3x^2 - 4x^6 - 4x^3}{(x^4 + 1)^2},$$

$$\text{soit } f'(x) = \frac{-x^6 - 4x^3 + 3x^2}{(x^4 + 1)^2} = \frac{-x^2(x^4 + 4x - 3)}{(x^4 + 1)^2} = \frac{-x^2 p(x)}{(x^4 + 1)^2}$$

2) b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $(x^4 + 1)^2 > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $-x^2 p(x)$ , d'où:

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$ | 0           | $\beta$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------|-------------|------------|-----------|
| $-x^2$  |           | -        | 0           | -          |           |
| $p(x)$  | +         | 0        | -           | 0          | +         |
| $f'(x)$ | -         | 0        | +           | 0          | -         |
| $f$     | 0         |          | $f(\alpha)$ | $f(\beta)$ | 0         |

voir représentation graphique de  $f$   
donnée ci-dessous (à titre indicatif)

2) c) D'après le tableau des variations précédent,  $f$  possède un maximum en  $\beta$ , égal à  $f(\beta)$ . Montrons que  $f(\beta) = \frac{3}{4\beta}$ , en raisonnant par équivalences logiques:

$$f(\beta) = \frac{3}{4\beta} \Leftrightarrow \frac{\beta^3 + 1}{\beta^4 + 1} = \frac{3}{4\beta} \Leftrightarrow 4\beta(\beta^3 + 1) = 3(\beta^4 + 1) \Leftrightarrow 4\beta^4 + 4\beta = 3\beta^4 + 3$$

$\Leftrightarrow \beta^4 + 4\beta - 3 = 0 \Leftrightarrow p(\beta) = 0$  : ce qui est vrai car  $\beta$  est une solution de l'équation  $p(x) = 0$ . Par conséquent on a bien  $f(\beta) = \frac{3}{4\beta}$ .

