Bac S, Polynésie, septembre 2010 – CORRECTION

Partie 1

1. On a $g(x) = \mathrm{e}^x(1-x)+1$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, et par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$, donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
2. La fonction g est dérivable par somme et produit sur $\mathbb{R}$:
   $g'(x) = \mathrm{e}^x - (1\times\mathrm{e}^x + x\times\mathrm{e}^x) + 0 = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$.
   Pour tout x réel , $\mathrm{e}^x > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $-x$.
   g est donc strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. On déduit de 1. et 2. :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	0		$-$		
g	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4. (a) g est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, $g(0) = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ donc $0 \in \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x); g(0)\right]$ et d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in [0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   (b) La calculatrice donne $g(1,27) \approx 0,04$ et $g(1,28) \approx -0,007$, donc $g(1,28) < g(\alpha) = 0 < g(1,27)$, ce qui prouve que $1,27 < \alpha < 1,28$ par stricte décroissance de g sur $[0;+\infty[$.
   (c) On a $g(\alpha) = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha - \alpha\mathrm{e}^\alpha + 1 = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha) = -1 \iff \mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$.
5. D'après le tableau des variations de g (complété), on a :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

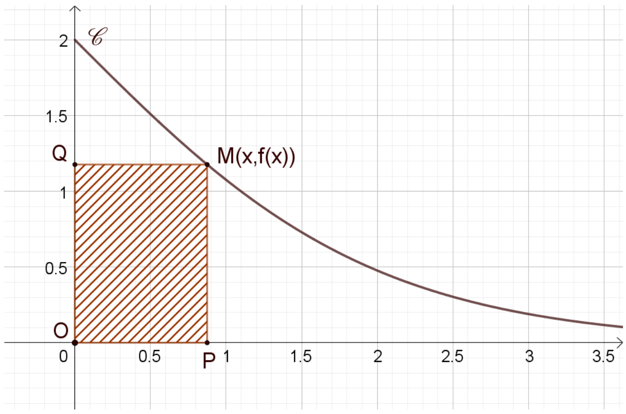
Partie 2

1. La fonction A, quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annulant pas), est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $A'(x) = \dfrac{4\left(\mathrm{e}^x+1\right) - 4x\times\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \dfrac{4\left(\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1\right)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \dfrac{4g(x)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$.
   Comme $\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2 > 0$ quel que soit x, le signe de $A'(x)$ est celui de $g(x)$.
2. On en déduit (voir partie 1, question 5) :

x	0		α		$+\infty$
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
A	0	$\nearrow$	$A(\alpha)$	$\searrow$	

Partie 3

1. L'aire du rectangle OPMQ est égale à OP$\times$OQ :



On sait que $x \geqslant 0$, donc l'aire du rectangle OPMQ est égale à $x \times f(x) = \dfrac{4x}{e^x+1} = A(x)$. Or d'après son tableau des variations, la fonction A présente un maximum en α. L'aire de OPMQ est donc bien maximale lorsque $x = \alpha$.

2. On a $f = 4 \times \dfrac{1}{u}$ avec $u : x \mapsto e^x + 1$, donc f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $f' = 4 \times \dfrac{-u'}{u^2} = -\dfrac{4u'}{u^2}$, soit pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = -\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$. La pente de la tangente T en M à $\mathscr{C}$ est donc $f'(\alpha) = -\dfrac{4e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2}$. Or d'après la partie 1 (4.c.), on a $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$, donc la pente de T vaut : $-\dfrac{\dfrac{4}{\alpha-1}}{\left(\dfrac{1}{\alpha-1}+1\right)^2} = -\dfrac{\dfrac{4}{\alpha-1}}{\left(\dfrac{1}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha-1}{\alpha-1}\right)^2} = -\dfrac{\dfrac{4}{\alpha-1}}{\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2} = -\dfrac{\dfrac{4}{\alpha-1}}{\dfrac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.

D'autre part, la pente de (PQ) est égale à $\dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{f(\alpha)-0}{0-\alpha} = -\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = -\dfrac{4}{\alpha(e^\alpha+1)} = -\dfrac{4}{\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha-1}{\alpha-1}\right)} = -\dfrac{4}{\alpha \times \dfrac{\alpha}{\alpha-1}} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.

Ainsi (PQ) et T on même pente, ce qui prouve qu'elles sont parallèles.