– 1) a) $g : x \mapsto x + \underbrace{e^{2x}}_{u}\underbrace{(x^2-x+1)}_{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, produit et somme et

$\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x) = 1 + \underbrace{2e^{2x}}_{u'}\underbrace{(x^2-x+1)}_{v} + \underbrace{e^{2x}}_{u}\underbrace{(2x-1)}_{v'} = 1 + e^{2x}(2x^2+1)$. Or $e^{2x}>0$, $2x^2+1>0$

donc $g'(x)>0$, ce qui prouve que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

– 1) b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ (1).

D'autre part si $x\neq 0$, $x^2-x+1 = x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$. Or par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 1-0+0=1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x+1) = +\infty$ (2).

On déduit de (1) et (2) par produit que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}(x^2-x+1) = +\infty$ puis par somme que

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

– 1) c) Si $x\in\mathbb{R}$, $x + (xe^{x})^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = x + x^2e^{2x}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = x + e^{2x}(x^2-x+1) = g(x)$.

Par somme, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 1-0+0=1$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$ donc par produit

$\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{x})^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 0^2\times 0 = 0$. Finalement, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, on déduit par somme que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

– 1) d) On déduit des questions précédentes le tableau des variations de g :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
g	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

La fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; d'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ donc $0 \in \left]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[$ et le corollaire du T.V.I garantit l'existence d'un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$.

On a $g(0) = 0 + e^{0}(0^2-0+1) = 1$ et $g(-1) = -1 + e^{-2}(1+1+1) = -1 + \frac{3}{e^2} = \frac{3-e^2}{e^2} < 0$,

donc $g(-1) < g(\alpha) = 0 < g(0)$, ce qui prouve que $-1<\alpha<0$, par stricte croissance de g sur $\mathbb{R}$.

– 1) e) }
1) f) } voir au verso*.

– 2) a) $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}-1}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, somme et quotient et

$$f'(x) = \frac{(2e^{2x}-0)(x^2+1) - 2x(e^{2x}-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2e^{2x} + 2e^{2x} - 2xe^{2x} + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2e^{2x}(x^2-x+1)+2x}{(x^2+1)^2}$$

d'où $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{(x^2+1)^2}$.

↪

par somme

– 2)b) On a $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$.

Par somme on a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{2x} - 1) = 0 - 1 = -1$; comme $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2+1 = +\infty$, on obtient finalement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, par quotient.

– 2)c) Si $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x) = \dfrac{\frac{e^{2x}}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{\frac{(e^x)^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{\left(\frac{e^x}{x}\right)^2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x}\right)^2 = +\infty$; comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$, on déduit par somme que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\dfrac{e^x}{x}\right)^2 - \dfrac{1}{x^2}\right] = +\infty$. D'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1 + 0 = 1$ donc par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

– 2)d) Comme $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{(x^2+1)^2}$, $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$ (car $2>0$ et $(x^2+1)^2>0$).

Le tableau des variations de g (complété) entraîne donc :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

– 2)e) D'après le tableau ci-contre, f possède un minimum sur $\mathbb{R}$, égal à $f(\alpha)$. Or $g(\alpha) = 0$, donc $e^{2\alpha}(\alpha^2 - \alpha + 1) = -\alpha$, soit $e^{2\alpha} = -\dfrac{\alpha}{\alpha^2 - \alpha + 1}$.

On a alors $f(\alpha) = \dfrac{e^{2\alpha} - 1}{\alpha^2+1} = \dfrac{-\frac{\alpha}{\alpha^2-\alpha+1} - 1}{\alpha^2+1} = -\dfrac{\frac{\alpha}{\alpha^2-\alpha+1} + \frac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha^2-\alpha+1}}{\alpha^2+1} = -\dfrac{\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-\alpha+1}}{\alpha^2+1}$

et finalement $f(\alpha) = -\dfrac{1}{\alpha^2 - \alpha + 1}$.

* 1)e)
1)f)

```
a ← −1
b ← 0
Tant que b − a > 0,1 :
    c ← (a+b)/2
    Si g(a) × g(c) ⩽ 0, alors :
        b ← c
    Sinon :
        a ← c
    Fin Si/Sinon
Fin Tant que
```

Étape	c	$g(a)$	$g(c)$	Test(¤) ?	a	b	Test(*) ?
Initialisation					-1	0	oui
Étape 1	-0,5	-0,59	0,14	oui	-1	-0,5	oui
Étape 2	-0,75	-0,59	-0,23	non	-0,75	-0,5	oui
Étape 3	-0,625	-0,23	-0,05	non	-0,625	-0,5	oui
Étape 4	-0,5625	-0,05	0,05	oui	-0,625	-0,5625	non
....					SORTIES		