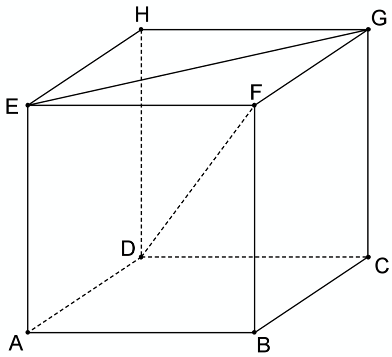
Correction de l'exercice n°3 de la feuille « Orthogonalité dans l'espace »



a) Comme ABCDEFGH est un cube on a (DH) $\perp$ (HE) et (DH) $\perp$ (HG). La droite (DH) est donc orthogonale à deux droites sécantes (en H) incluses dans le plan (EGH), ce qui établit que (DH) est orthogonale au plan (EGH). Or (EG) $\subset$ (EGH), donc (DH) $\perp$ (EG).

b) Comme EFGH est un carré, on a (EG) $\perp$ (FH). Or d'après ce qui précède, on a aussi (EG) $\perp$ (DH) donc (EG) est orthogonale à deux droites sécantes (en H) incluses dans le plan (DFH), ce qui prouve que (EG) $\perp$ (DFH). Comme (DF) $\subset$ (DFH), on a donc (EG) $\perp$ (DF).

c) Comme AEFB est un carré, on a (BE) $\perp$ (FA). On a aussi (BE) $\perp$ (AD) : En effet (AD) est orthogonale aux deux droites (AE) et (AB), sécantes (en A) et incluses dans le plan (EAB) donc (AD) est orthogonale au plan (EAB) et donc aussi à la droite (BE) qui est incluse dans le plan (EAB). Ainsi (BE) est orthogonale aux deux droites (FA) et (AD), sécantes (en A) et incluses dans le plan (AFD), ce qui prouve que (BE) $\perp$ (AFD).

d) On a (BE) $\perp$ (AFD) et (DF) $\subset$ (AFD) donc (BE) $\perp$ (DF). Comme (DF) $\perp$ (EG), la droite (DF) est donc orthogonale aux deux droites (BE) et (EG), sécantes (en E) et incluses dans le plan (BEG). Cela établit finalement que (DF) $\perp$ (BEG).