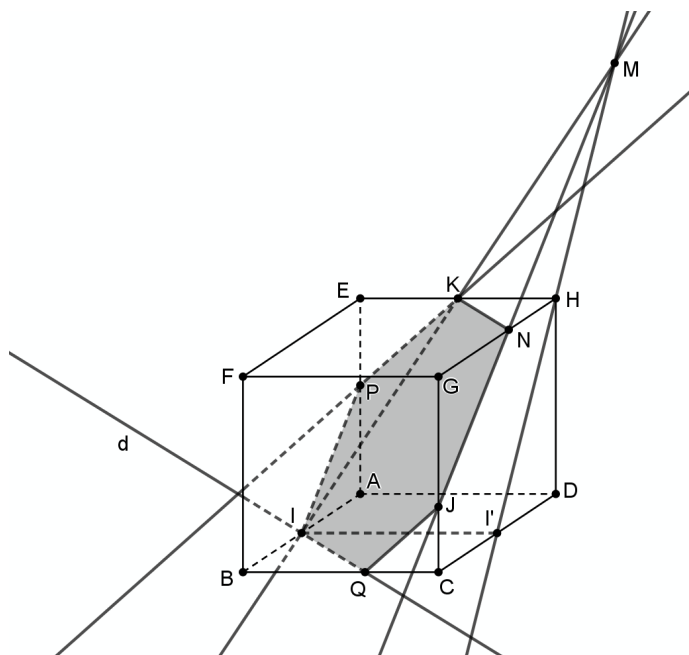


Correction du devoir de Pâques

• Exercice I



1. (a) On a $(II') \parallel (KH)$ donc I, I', K et H sont coplanaires. Les droites (IK) et $(I'H)$ sont donc coplanaires ; comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point M . On a $I' \in (CD)$ et $(CD) \subset (CGD)$ donc $I' \in (GCD)$. D'autre part $H \in (GCD)$ donc $(I'H) \subset (GCD)$. Comme $M \in (I'H)$, on donc $M \in (GCD)$, ce qui prouve que $(GCD) \cap (IK) = \{M\}$.
- (b) • On a $M \in (IK)$ et $(IK) \subset (IJK)$ donc $M \in (IJK)$, ce qui montre que $M \in (IJK) \cap (GCD)$. D'autre part, $J \in (GC)$ et $(GC) \subset (GCD)$ donc $J \in (GCD)$, ce qui prouve que $J \in (IJK) \cap (GCD)$. Ainsi, M et J appartiennent aux deux plans sécants (IJK) et (GCD) , par conséquent $(IJK) \cap (GCD) = (MJ)$.
 • On a $(MJ) \subset (GCD)$ et $(GH) \subset (GCD)$ donc (MJ) et (GH) sont coplanaires ; comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point N .
 $N \in (GH)$ et $(GH) \subset (EFG)$ donc $N \in (EFG)$. $N \in (MJ)$ et $(MJ) \subset (IJK)$ donc $N \in (IJK)$. $K \in (EH)$ et $(EH) \subset (EFG)$ donc $K \in (EFG)$, ce qui prouve que $K \in (IJK) \cap (EFG)$. Ainsi, N et K appartiennent à la fois aux plans sécants (IJK) et (EFG) , par conséquent $(IJK) \cap (EFG) = (KN)$.
2. $(EFG) \parallel (ABC)$ et $(IJK) \cap (EFG) = (KN)$ donc les plans (IJK) et (ABC) sont sécants et ont une droite d'intersection d telle que $d \parallel (KN)$. Or $I \in (AB)$ et $(AB) \subset (ABC)$ donc $I \in (ABC)$, d'où $I \in (IJK) \cap (ABC) = d$. Ainsi, d est la parallèle à (KN) passant par I .
3. • Les droites d et (BC) sont sécantes en un point Q ; on a $(IJK) \cap (FGC) = (QJ)$.
 • $(IJK) \cap (AED)$ est la droite parallèle à (QJ) passant par K ; celle-ci coupe (EA) en un point P .
 • On a alors $(IJK) \cap (EAB) = (PI)$.

• **Exercice II**

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par composition et quotient et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} : f'(x) = \frac{(2-x) \times (-e^{-x}) - (-1) \times e^{-x}}{(2-x)^2} = \frac{(x-1)e^{-x}}{(2-x)^2}.$$

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on a $e^{-x} > 0$ et $(2-x)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$, d'où :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
f	$+\infty$	$\frac{1}{e}$	$+\infty$	0

(Détail : $f(1) = \frac{e^{-1}}{2-1} = \frac{1}{e}$)

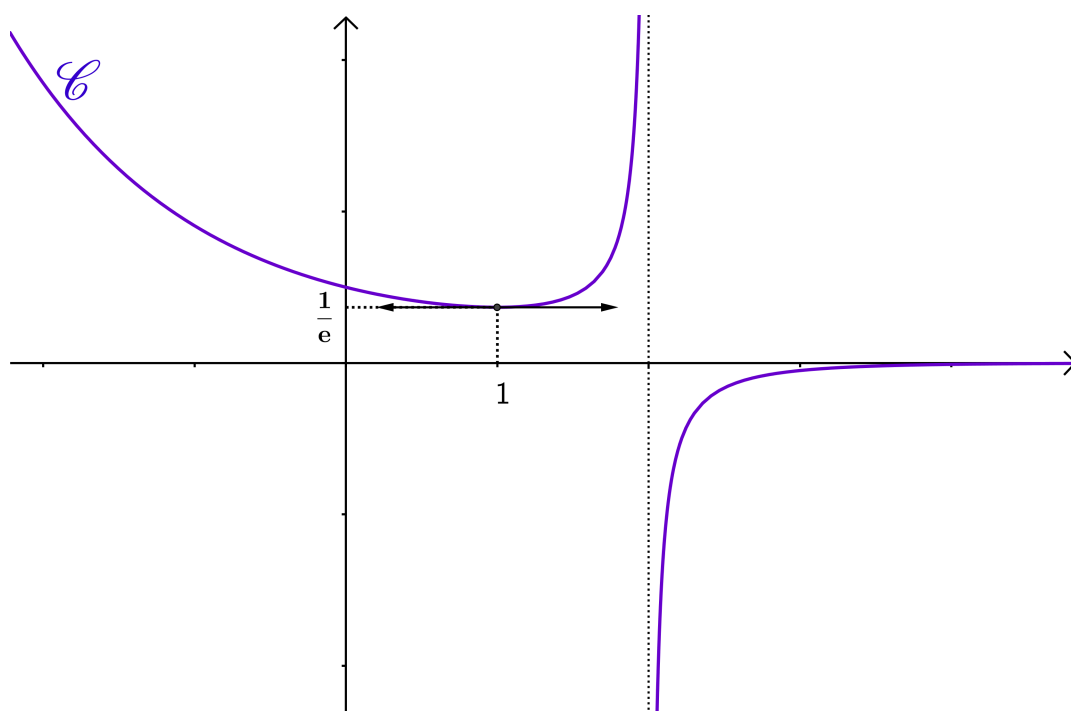
Justification des limites :

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on a $f(x) = \frac{1}{(2-x)e^x}$.

- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x) = -\infty$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x = -\infty$ puis par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- Si $x < 2$, on a par produit $(2-x)e^x > 0$. D'autre part, $(2-x)e^x = 2e^x - xe^x$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 2 \times 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x)e^x = 0^+$ puis par quotient $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Voici à titre de curiosité l'allure du graphe $\mathcal{C}$ de la fonction f :



- (b) D'après le tableau des variations précédent, la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0; 1]$. Par conséquent, lorsque $0 \leq x \leq 1$, on a $f(1) \leq f(x) \leq f(0)$,

c'est-à-dire $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

2. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $H : x \mapsto (ax + b)e^{-x}$. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, somme et produit et $\forall x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = a \times e^{-x} + (ax + b) \times (-e^{-x}) = (-ax + a - b)e^{-x}$. Pour que H soit une primitive de $h : x \mapsto (x + 2)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire pour que $H' = h$ sur $\mathbb{R}$), il suffit donc que les réels a et b soient solutions du système :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$$

Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est donc $H : x \mapsto (-x - 3)e^{-x}$.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \text{On a } J &= \int_0^1 h(x) dx \quad \text{donc} \quad J = [H(x)]_0^1 = [(-x - 3)e^{-x}]_0^1, \text{ d'où :} \\ J &= -4e^{-1} - (-3)e^{-0} = 3 - \frac{4}{e}. \end{aligned}$$

- (b) Si $x \in [0; 1]$, on a $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ donc comme $x^2 \geq 0$, on a :

$$\frac{1}{e}x^2 \leq x^2 f(x) \leq \frac{1}{2}x^2.$$

Par croissance de l'intégrale (vu que $0 \leq 1$), on déduit que :

$$\int_0^1 \frac{1}{e}x^2 dx \leq \int_0^1 x^2 f(x) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 dx$$

$$\text{soit } \left[\frac{1}{3e}x^3 \right]_0^1 \leq K \leq \left[\frac{1}{6}x^3 \right]_0^1, \text{ ou encore : } \frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}.$$

- (c) On a $J + K = \int_0^1 (2 + x)e^{-x} dx + \int_0^1 x^2 f(x) dx$, d'où par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} J + K &= \int_0^1 \left[(2 + x)e^{-x} + \frac{x^2 e^{-x}}{2 - x} \right] dx = \int_0^1 \frac{(2 - x)(2 + x)e^{-x} + x^2 e^{-x}}{2 - x} dx, \text{ d'où :} \\ J + K &= \int_0^1 \frac{(2^2 - x^2)e^{-x} + x^2 e^{-x}}{2 - x} dx = \int_0^1 \frac{4e^{-x}}{2 - x} dx = 4 \int_0^1 \frac{e^{-x}}{2 - x} dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale) et finalement } J + K = 4I. \end{aligned}$$

- (d) On a $\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$ donc $3 - \frac{4}{e} + \frac{1}{3e} \leq J + K \leq 3 - \frac{4}{e} + \frac{1}{6}$, soit :

$$3 - \frac{11}{3e} \leq 4I \leq \frac{19}{6} - \frac{4}{e}, \text{ d'où } \frac{3}{4} - \frac{11}{12e} \leq I \leq \frac{19}{24} - \frac{1}{e} \quad (\text{vu que } 4 > 0).$$

$$\text{Or } \frac{3}{4} - \frac{11}{12e} \approx 0,41277718 \quad \text{et} \quad \frac{19}{24} - \frac{1}{e} \approx 0,42378723 \quad \text{donc } \underbrace{I \approx 0,42}_{\text{à } 10^{-2} \text{ près}}.$$