Épreuve de Mathématiques

TS1

Lycée Blaise Pascal

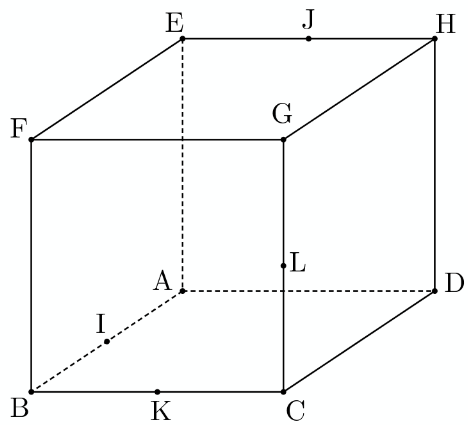
20 mai 2017

Durée de l'épreuve : 4 heures

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Exercice 1 (5 points)

ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. (a) Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK).
   Déterminer les coordonnées du point M.

4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.

5. Calculer le volume du tétraèdre FIJK.

6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

Exercice 2 (5 points)

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

■ Partie A : propriétés du nombre j

1. (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0\,.$$

   (b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.

3. Démontrer les égalités suivantes :

   (a) $\mathrm{j}^3 = 1\,,$

   (b) $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}\,.$

4. On note P, Q et R les images respectives des nombres complexes $1, \mathrm{j}$ et j^2 dans le plan.
   Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

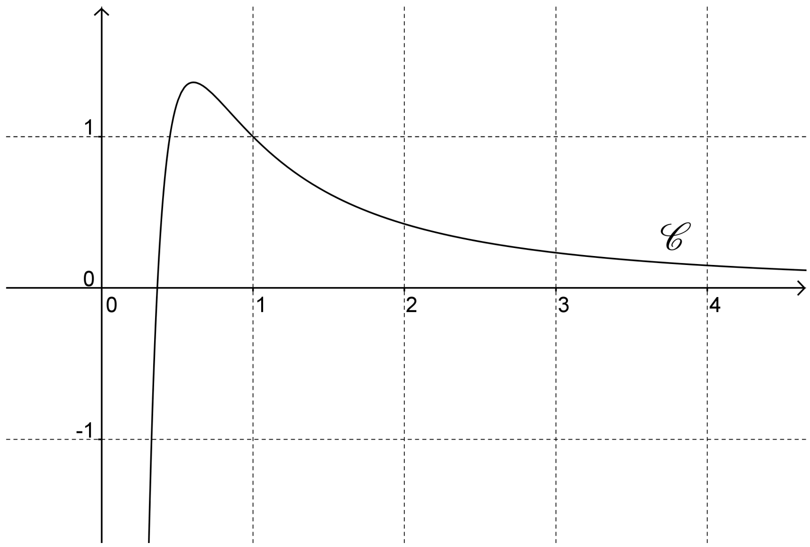
■ Partie B : lien avec les triangles équilatéraux

Soient a, b et c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2c = 0$.
On note A, B et C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A.3.b., démontrer l'égalité : $a - c = \mathrm{j}(c - b)$.
2. En déduire que $\mathrm{AC} = \mathrm{BC}$.
3. Démontrer l'égalité : $a - b = \mathrm{j}^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. (a) Étudier la limite de f en 0.

   (b) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,
$$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}\ .$$

   (b) Résoudre sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.

   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. (a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$.

   (a) Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$.

   (b) Montrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \dfrac{-2-\ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   Calculer alors I_n en fonction de n.

   (c) Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 4 (5 points)

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 & = 1 \\ v_{n+1} & = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$

■ Partie A : convergence de la suite (v_n)

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	**Algorithme N° 2**	**Algorithme N° 3**
Variables :	**Variables :**	**Variables :**
v est un réel	v est un réel	v est un réel
i et n sont des entiers naturels	i et n sont des entiers naturels	i et n sont des entiers naturels
Début de l'algorithme :	**Début de l'algorithme :**	**Début de l'algorithme :**
Lire n	Lire n	Lire n
v prend la valeur 1	Pour i variant de 1 à n faire	v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire	v prend la valeur 1	Pour i variant de 1 à n faire
v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$	Afficher v	Afficher v
Fin pour	v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$	v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Afficher v	Fin pour	Fin pour
		Afficher v
Fin algorithme	**Fin algorithme**	**Fin algorithme**

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

   Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

   La suite (v_n) est-elle monotone ?

   (c) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

■ Partie B : recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).