Devoir de Pâques

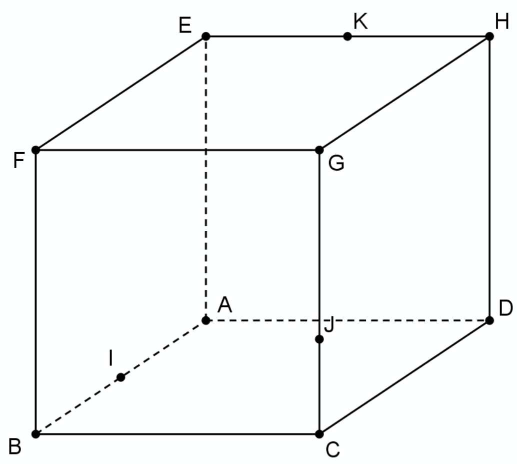
• Exercice I

On a représenté ci-dessous un cube ABCDEFGH de l'espace. Le point I (resp. J, K) est sur l'arête [AB] (resp. [GC], [EH]).

Les constructions demandées dans les questions 1.a., 1.b. et 2. doivent être justifiées.

1. (a) Construire le point d'intersection de la droite (IK) et du plan (CDG).
   Indication : on pourra utiliser le projeté de I sur [CD] parallèlement à (AD).

   (b) Construire la droite d'intersection du plan (IJK) avec le plan (CDG) puis celle avec le plan (EFG).
2. Construire la droite d'intersection du plan (IJK) et du plan (ABC).
3. Construire la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK).



• **Exercice II**

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right) \mathrm{d}x$$

1. a. Dresser le tableau des variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~1]$, on a : $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2. Soit J et K les intégrales définies par : $J = \displaystyle\int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

a. Trouver deux réels a et b tels que la fonction $H : x \longmapsto (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction $h : x \longmapsto (x+2)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que $J = 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

b. Utiliser la question 1.b. pour démontrer que : $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$.

c. Démontrer que $J + K = 4I$.

d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I.