

Mobiliser quelques souvenirs de 1^{ère}S concernant les suites...

Correction du devoir de rentrée

A

$$1. \quad (a) \quad \text{On a } u_1 = u_{0+1} = \frac{3u_0 + 1}{4} = \frac{3 \times 0 + 1}{4} = 0,25,$$

$$u_2 = u_{1+1} = \frac{3u_1 + 1}{4} = \frac{3 \times 0,25 + 1}{4} = 0,4375, \text{ et}$$

$$u_3 = u_{2+1} = \frac{3u_2 + 1}{4} = \frac{3 \times 0,4375 + 1}{4} = 0,578125.$$

(b) Programme (calculatrice TI) :

Prompt N	demande la valeur de N
0→U	U prend la valeur 0
For(I,1,N)	pour I allant de 1 à N (boucle)
(3U+1)/4→U	U prend la valeur (3U+1)/4
End	
Disp U	Affiche la valeur de U

↔ En arrondissant à 10^{-7} près :

$$u_{10} \approx 0,9436865, u_{20} \approx 0,9968288 \text{ et } u_{50} \approx 0,9999994.$$

(c) Il semble que le terme u_n se rapproche de plus en plus de la valeur 1, à mesure que le rang n augmente.

2. • On a $u_1 - u_0 = 0,25$ et $u_2 - u_1 = 0,4375 - 0,25 = 0,1875$, donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, ce qui prouve que u n'est pas une suite arithmétique.

• On a $u_0 = 0$; si la suite u était géométrique de raison q , on aurait $u_1 = q \times u_0 = 0$, ce qui n'est pas le cas. La suite u n'est donc pas géométrique.

$$3. \quad (a) \quad \text{Soit } n \in \mathbb{N}; \text{ on a } v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n + 1}{4} - \frac{4}{4} = \frac{3u_n - 3}{4} = \frac{3}{4}(u_n - 1), \text{ d'où}$$

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n. \text{ La suite } v \text{ est donc géométrique de raison } \frac{3}{4} = 0,75.$$

$$\text{On a } v_0 = u_0 - 1 = -1, \text{ donc pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times 0,75^n = -0,75^n.$$

(b) • Comme v est géométrique de raison $0,75$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n v_k = v_0 \frac{1 - 0,75^{n+1}}{1 - 0,75} = -\frac{1 - 0,75^{n+1}}{0,25} = 4 \times 0,75^{n+1} - 4.$$

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u_k = v_k + 1$ donc si $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n u_k = (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + \cdots + (v_n + 1) = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n+1 \text{ termes}},$$

$$\text{d'où } \sum_{k=0}^n u_k = 4 \times 0,75^{n+1} - 4 + n + 1 = n + 4 \times 0,75^{n+1} - 3.$$

B

$$1. \quad \text{On a } w_1 = w_{0+1} = \frac{3w_0 - 2}{2w_0 - 1} = \frac{3 \times 3 - 2}{2 \times 3 - 1} = \frac{7}{5}, \text{ et}$$

$$w_2 = w_{1+1} = \frac{3w_1 - 2}{2w_1 - 1} = \frac{3 \times \frac{7}{5} - 2}{2 \times \frac{7}{5} - 1} = \frac{21 - 10}{14 - 5} = \frac{11}{9}.$$

$$2. \quad (a) \quad \text{On a } u_0 = \frac{1}{w_0 - 1} = \frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2}, u_1 = \frac{1}{w_1 - 1} = \frac{1}{\frac{7}{5} - 1} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}, \text{ et}$$

$$u_2 = \frac{1}{w_2 - 1} = \frac{1}{\frac{11}{9} - 1} = \frac{1}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{2}.$$

$$(b) \quad \text{Soit } n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{1}{w_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{3w_n - 2}{2w_n - 1} - 1} = \frac{1}{\frac{3w_n - 2}{2w_n - 1} - \frac{2w_n - 1}{2w_n - 1}}, \text{ d'où } u_{n+1} = \frac{1}{\frac{w_n - 1}{2w_n - 1}} =$$

$$\frac{2w_n - 1}{w_n - 1}. \text{ On a alors } u_{n+1} - u_n = \frac{2w_n - 1}{w_n - 1} - \frac{1}{w_n - 1} = \frac{2w_n - 2}{w_n - 1} = 2.$$

(c) Le résultat précédent prouve que u est une suite arithmétique de raison 2. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times 2 = \frac{1}{2} + 2n$.

Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq \frac{1}{2}$, d'où $u_n \neq 0$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $u_n = \frac{1}{w_n - 1}$, donc $u_n(w_n - 1) = 1$, soit $u_n w_n - u_n = 1$, d'où

$u_n w_n = 1 + u_n$. Comme $u_n \neq 0$, on obtient $w_n = \frac{1 + u_n}{u_n}$, d'où $w_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + 2n}{\frac{1}{2} + 2n}$ et

finalement $w_n = \frac{4n + 3}{4n + 1}$.

3. (a) On a admis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$; $w_n \in]1; 1,001[\iff w_n < 1,001 \iff \frac{4n + 3}{4n + 1} < 1,001 \iff 4n + 3 < 1,001(4n + 1)$, car $4n + 1 > 0$, vu que $n \geq 0$. Donc $w_n \in]1; 1,001[\iff 4n + 3 < 4,004n + 1,001 \iff 1,999 < 0,004n \iff \frac{1,999}{0,004} < n$, car $0,004 > 0$. Ainsi $w_n \in]1; 1,001[\iff n > 499,75 \iff n \geq 500$ (car $n \in \mathbb{N}$). L'entier $N_1 = 500$ répond donc à la question (en effet, observer qu'on a raisonné par équivalences logiques : si $n \geq 500$ est vrai, alors $w_n \in]1; 1,001[$ aussi, et réciproquement).

- (b) On va généraliser le raisonnement fait précédemment en remplaçant $\underbrace{1,001}_{1+0,001}$ par $1 + \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}$; $w_n \in]1; 1 + \varepsilon[\iff w_n < 1 + \varepsilon \iff \frac{4n + 3}{4n + 1} < 1 + \varepsilon \iff 4n + 3 < (1 + \varepsilon)(4n + 1)$, car $4n + 1 > 0$. Donc $w_n \in]1; 1 + \varepsilon[\iff 4n + 3 < 4n + 4\varepsilon n + 1 + \varepsilon \iff 2 - \varepsilon < 4\varepsilon n \iff \frac{2 - \varepsilon}{4\varepsilon} < n$, car $4\varepsilon > 0$. Ainsi $w_n \in]1; 1 + \varepsilon[\iff n > \frac{2 - \varepsilon}{4\varepsilon}$.

N'importe quel entier naturel N strictement supérieur à $\frac{2 - \varepsilon}{4\varepsilon}$ répond à la question. En effet, si on a $n \geq N$, on a $n > \frac{2 - \varepsilon}{4\varepsilon}$ et donc $w_n \in]1; 1 + \varepsilon[$ (là encore, bien observer qu'on a raisonné ci-dessus par équivalences).