

1) Définir ce qu'est le conjugué d'un nombre complexe :

① Soit $z = a + bi$ un nombre complexe (avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$), le conjugué de z est $\bar{z} = a - bi$.

2) Définir ce qu'est un nombre imaginaire pur :

① Un nombre complexe est dit imaginaire pur lorsque sa partie réelle est nulle.

3) Soit z un nombre complexe. Compléter les formules suivantes :

① $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z)i$

4) Soit $z \in \mathbb{C}$; compléter les équivalences logiques suivantes :

$\bar{z} = z \Leftrightarrow (z \text{ est réel})$

① $\bar{z} = -z \Leftrightarrow (z \text{ est imaginaire pur})$

5) Démontrer que si z et z' sont deux nombres complexes, alors : $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$.

Posons $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$, $a' = \operatorname{Re}(z')$ et $b' = \operatorname{Im}(z')$.

③ • On a $z \times z' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'b'i + bb'i^2$,
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{-1}$

d'où $z \times z' = \underbrace{(aa' - bb')}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(ab' + a'b)}_{\in \mathbb{R}}i \rightarrow \text{forme algébrique de } z \times z'$

et donc $\overline{z \times z'} = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i$.

• D'autre part, $\bar{z} \times \bar{z}' = (a - bi)(a' - b'i)$
 $= aa' - ab'i - a'b'i + bb'i^2$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{-1}$
 $= (aa' - bb') - (ab' + a'b)i$

• On constate qu'on a bien $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$