TS

Correction des exercices à chercher pour lundi 18/09

Dans chacune des questions, z désignant un complexe, on posera $a = \mathfrak{Re}(z)$ et $b = \mathfrak{Im}(z)$.

- $\dfrac{z}{\mathrm{i}-1} - \mathrm{i} = \dfrac{z}{\mathrm{i}+1} + \mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{\mathrm{i}-1} - \dfrac{1}{\mathrm{i}+1} \right) z = 2\,\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{i}+1-(\mathrm{i}-1)}{\mathrm{i}^2 - 1^2} z = 2\,\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{-2} z = 2\,\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z = -2\,\mathrm{i}$

- $\overline{z} = \mathrm{i}\,z \;\Leftrightarrow\; a - b\,\mathrm{i} = i\,(a + b\,\mathrm{i}) \;\Leftrightarrow\; a - b\,\mathrm{i} = -b + a\,\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ \text{et} \\ -b = a \end{cases} \Leftrightarrow \quad (b = -a)$$

Ainsi on a : $\overline{z} = \mathrm{i}\,z \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{Im}(z) = -\mathfrak{Re}(z)$.

Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'équation est constitué par tous les nombres complexes dont la partie imaginaire est l'opposée de la partie réelle : ils s'écrivent sous la forme $a - a\,\mathrm{i}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Par exemple $3 - 3i$, $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\,\mathrm{i}$ *etc.* en font partie.

- $z^2 = z\,\overline{z} \;\Leftrightarrow\; z^2 - z\,\overline{z} = 0 \;\Leftrightarrow\; z(z - \overline{z}) = 0 \;\Leftrightarrow\; (\ z = 0 \quad \text{ou} \quad z = \overline{z}\ )$

$\Leftrightarrow\; (\ z = 0 \quad \text{ou} \quad z \in \mathbb{R}\ ) \;\Leftrightarrow\; (\ z \in \mathbb{R}\ )$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire est constitué par ***tous*** les nombres réels).

- $\overline{z} - 1 = z\,\overline{z} - \mathrm{i} \;\Leftrightarrow\; a - b\,\mathrm{i} - 1 = (a + b\,\mathrm{i})(a - b\,\mathrm{i}) - \mathrm{i} \;\Leftrightarrow\; a - 1 - b\,\mathrm{i} = a^2 - (b\,\mathrm{i})^2 - \mathrm{i}$

$\Leftrightarrow\; a - 1 - b\,\mathrm{i} = a^2 - (b\,\mathrm{i})^2 - \mathrm{i} \;\Leftrightarrow\; (\underbrace{a-1}_{\in\mathbb{R}}) + (\underbrace{-b}_{\in\mathbb{R}})\,\mathrm{i} = (\underbrace{a^2+b^2}_{\in\mathbb{R}}) + (\underbrace{-1}_{\in\mathbb{R}})\,\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = a^2 + b^2 \\ \text{et} \\ -b = -1 \end{cases} \qquad \text{(par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a + 2 = 0 \\ \text{et} \\ b = 1 \end{cases}$$

L'équation du second degré $a^2 - a + 2 = 0$ a un discriminant égal à $\Delta = -7$. Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède aucune solution réelle (attention, des solutions complexes non réelles ne nous intéresseraient pas puisque a, comme toute partie réelle (ici, celle de z) qui se respecte, est un nombre réel).

Ainsi l'équation de départ ne possède aucune solution dans $\mathbb{C}$.