0) Rappels de première

A - Généralités

Définition **:** Une suite numérique u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. C'est-à-dire qu'à chaque entier naturel n, on fait correspondre un réel noté u_n (appelé terme de rang n de la suite u).

Exemples **: 1)** On peut définir une suite grâce au mode *explicite*, c'est-à-dire exprimer le terme général de rang n directement en fonction de n.

ex : la suite u définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. On a $u_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$ etc.

2) On peut également utiliser le mode *implicite* pour définir une suite.
Dans ce cas, une relation (appelée *relation de récurrence*) permet de calculer chaque terme en fonction du précédent à condition de connaître le terme initial.

ex **:** la suite u définie par son terme initial $u_0 = -1$ et la relation : $u_{n+1} = 2u_n - n$ (♣).

Dans ce cas, les termes u_1, u_2, u_3 (etc.) se calculent en remplaçant successivement n par 0,1,2 (*etc.*) dans la relation (♣) :

$u_{0+1} = 2u_0 - 0 = 2\times(-1) - 0 = -2 \Rightarrow u_1 = -2$,

$u_{1+1} = 2u_1 - 1 = 2\times(-2) - 1 = -5 \Rightarrow u_2 = -5$,

$u_{2+1} = 2u_2 - 2 = 2\times(-5) - 2 = -12 \Rightarrow u_3 = -12$ (*etc.*)

Remarque : Il arrive que u_n soit défini seulement à partir d'un certain rang n_0. On dit que n_0 est le rang initial de la suite (u_n).

B - Monotonie des suites

Définition **:** Une suite numérique u est dite croissante (resp. décroissante) lorsque pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$).
Dans un cas comme dans l'autre, on parle de suite *monotone*.

Remarques **: 1)** En pratique, pour montrer que la suite u est croissante ou décroissante, on est souvent amené à étudier le signe de la différence : $u_{n+1} - u_n$.

2) Certains cas particuliers dans lesquels le terme général de la suite est toujours strictement positif peuvent se traiter en étudiant le rapport de u_{n+1} sur u_n :

Si pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors u est croissante. Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors u est décroissante.

3) Si les symboles d'inégalités sont stricts, on parle de stricte (dé)croissance.

4) Attention, une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante. C'est le cas de la suite u définie par $u_n = (-1)^n$ qui prend alternativement les valeurs 1 et -1.

Exemples **: 1)** Montrons que la suite u définie par son terme initial $u_1 = 2$ et la relation : $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + n + 2$ est croissante :

Soit $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + n + 2$. Comme $u_n^2 \geq 0$ (carré), on a $u_{n+1} - u_n \geq 3 > 0$, d'où : pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} > u_n$: u est une suite strictement croissante.

2) Montrons que la suite v définie pour $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{2}{5^n}$ est strictement décroissante :

Comme v est à termes strictement positifs, on peut appliquer la remarque 2) précédente :

si $n \geq 0$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2/5^{n+1}}{2/5^n} = \dfrac{2 \times 5^n}{2 \times 5^{n+1}} = \dfrac{1}{5}$, d'où $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$: v est strictement décroissante.

C - Suites arithmétiques

Définition : La suite u est dite arithmétique de raison r lorsque :
pour tout entier naturel n, $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \to \ldots \to u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

Exemples : **1)** La suite des entiers impairs est arithmétique de raison 2.
2) Une suite arithmétique de raison nulle est une suite constante.

Propriétés : Soit u une suite arithmétique de raison r.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = u_0 + n \times r}$.
- Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = u_p + (n-p) \times r}$.

Propriété : ***Somme des premiers termes***
Si u est une suite arithmétique de raison r, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}.$$

On peut retenir plus généralement pour une suite arithmétique :

$$\text{Somme de termes consécutifs} = \begin{pmatrix}\text{nombre de}\\ \text{termes}\end{pmatrix} \times \frac{1er \text{ terme + dernier terme}}{2}.$$

Exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$.

Remarques **: 1)** Pour montrer qu'une suite u est arithmétique de raison r, il faut prouver que $(u_{n+1} - u_n)$ est une suite constante (égale à r).

Exemple : Montrons que la suite u définie par $u_n = \dfrac{3n}{2} - 7$ est arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{3(n+1)}{2} - 7\right) - \left(\dfrac{3n}{2} - 7\right) = \dfrac{3}{2}$. Donc u est arithmétique de raison 1,5.

2) Lorsque sa raison est strictement positive (resp. négative), une suite arithmétique est strictement croissante (resp. décroissante).

E - Suites géométriques

Définition : La suite u est dite géométrique de raison $q \neq 0$ lorsque :
pour tout entier naturel n, $\boxed{u_{n+1} = q \times u_n}$.

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \to \ldots \to u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$$

Exemples : **1)** La suite des puissances de 10 est géométrique de raison 10.
2) Une suite géométrique de raison 1 est une suite constante.
3) Montrons que la suite u définie par $u_n = \dfrac{-3}{2^n}$ est géométrique :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{-3}{2^{n+1}} = \dfrac{-3}{2 \times 2^n} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-3}{2^n}$, d'où $u_{n+1} = 0{,}5 \times u_n$.
Donc (Cf définition) u est géométrique de raison 0,5.

Propriétés : Soit u une suite géométrique de raison q.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = q^n \times u_0}$.
- Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = q^{n-p} \times u_p}$.

Propriété : ***Somme des premiers termes***
Si u est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \, \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

On peut retenir plus généralement pour une suite géométrique de raison distincte de 1:
Somme de termes consécutifs $= 1er$ terme $\times \dfrac{1-\text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1-\text{raison}}$.

Exemple : si $q \neq 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{1+q+...+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}}$.