TS

A.P. Quelques équations d'inconnue complexe...

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (on donnera les solutions sous forme algébrique) :

a) $2\,\mathrm{i}z = 1 - z$

b) $4\,\mathrm{i}z + 2\,\mathrm{i} = 1 - z + \mathrm{i}$

c) $\dfrac{4}{5} + \dfrac{2z}{3} = \dfrac{2\,\mathrm{i}}{5} - \mathrm{i}z$

d) $z = 2\,\overline{z}$

e) $2z - 4 = 5\,\mathrm{i} + 4\,\overline{z}$

f) $z\,\overline{z} = z + 2$

g) $\overline{z} + 1 = z\,\overline{z} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{i}$

TS

A.P. Quelques équations d'inconnue complexe...

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (on donnera les solutions sous forme algébrique) :

a) $2\,\mathrm{i}z = 1 - z$

b) $4\,\mathrm{i}z + 2\,\mathrm{i} = 1 - z + \mathrm{i}$

c) $\dfrac{4}{5} + \dfrac{2z}{3} = \dfrac{2\,\mathrm{i}}{5} - \mathrm{i}z$

d) $z = 2\,\overline{z}$

e) $2z - 4 = 5\,\mathrm{i} + 4\,\overline{z}$

f) $z\,\overline{z} = z + 2$

g) $\overline{z} + 1 = z\,\overline{z} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{i}$

TS

A.P. Quelques équations d'inconnue complexe...

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (on donnera les solutions sous forme algébrique) :

a) $2\,\mathrm{i}z = 1 - z$

b) $4\,\mathrm{i}z + 2\,\mathrm{i} = 1 - z + \mathrm{i}$

c) $\dfrac{4}{5} + \dfrac{2z}{3} = \dfrac{2\,\mathrm{i}}{5} - \mathrm{i}z$

d) $z = 2\,\overline{z}$

e) $2z - 4 = 5\,\mathrm{i} + 4\,\overline{z}$

f) $z\,\overline{z} = z + 2$

g) $\overline{z} + 1 = z\,\overline{z} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{i}$

A.P. Quelques équations d'inconnue complexe... : corrections

• **a)** $2\,\mathrm{i}z = 1 - z$

$\Leftrightarrow\ z + 2\,\mathrm{i}z = 1$

$\Leftrightarrow\ (1 + 2\,\mathrm{i})z = 1$

$\Leftrightarrow\ z = \dfrac{1}{1 + 2\,\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow\ z = \dfrac{1 - 2\,\mathrm{i}}{1^2 - (2\,\mathrm{i})^2}$

$\Leftrightarrow\ z = \dfrac{1 - 2\,\mathrm{i}}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\,\mathrm{i}$

• **b)** $4\,\mathrm{i}z + 2\,\mathrm{i} = 1 - z + \mathrm{i}$

$\Leftrightarrow\ z + 4\,\mathrm{i}z = 1 + \mathrm{i} - 2\,\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow\ (1 + 4\,\mathrm{i})z = 1 - \mathrm{i}$

$\Leftrightarrow\ z = \dfrac{1 - \mathrm{i}}{1 + 4\,\mathrm{i}} = \dfrac{(1 - \mathrm{i})(1 - 4\,\mathrm{i})}{1^2 + 4^2}$

$\Leftrightarrow\ z = \dfrac{1 - 4\,\mathrm{i} - \mathrm{i} + 4\,\mathrm{i}^2}{17} = -\frac{3}{17} - \frac{5}{17}\,\mathrm{i}$

• **c)** $\dfrac{4}{5} + \dfrac{2z}{3} = \dfrac{2\,\mathrm{i}}{5} - \mathrm{i}z$

$\Leftrightarrow\ \left(\frac{2}{3} + \mathrm{i}\right) z = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\,\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow\ z = \dfrac{-\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\,\mathrm{i}}{\frac{2}{3} + \mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow\ z = \dfrac{-12 + 6\,\mathrm{i}}{10 + 15\,\mathrm{i}}$ (après avoir multiplié par 15 en haut et en bas)

$\Leftrightarrow\ z = \dfrac{(-12 + 6\,\mathrm{i})(10 - 15\,\mathrm{i})}{10^2 + 15^2}$

$\Leftrightarrow\ z = \dfrac{-120 + 180\,\mathrm{i} + 60\,\mathrm{i} - 90\,\mathrm{i}^2}{325}$

$\Leftrightarrow\ z = \dfrac{-30 + 240\,\mathrm{i}}{325} = -\frac{6}{65} + \frac{48}{65}\,\mathrm{i}$

Dans les exercices qui suivent, on a $z \in \mathbb{C}$ et on notera $z = a + b\,\mathrm{i}$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

• **d)** $z = 2\,\overline{z}\ \Leftrightarrow\ a + b\,\mathrm{i} = 2(a - b\,\mathrm{i})\ \Leftrightarrow\ a + b\,\mathrm{i} = 2a - 2b\,\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow\ \begin{cases} a = 2a \\ \text{et} \\ b = -2b \end{cases}$ (par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe)

$\Leftrightarrow\ \begin{cases} a = 0 \\ \text{et} \\ b = 0 \end{cases} \ \Leftrightarrow\ z = 0$

• **e)** $2z - 4 = 5\,\mathrm{i} + 4\,\overline{z}\ \Leftrightarrow\ 2(a + b\,\mathrm{i}) - 4 = 5\,\mathrm{i} + 4(a - b\,\mathrm{i})\ \Leftrightarrow\ \underbrace{2a - 4}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2b}_{\in\mathbb{R}}\,\mathrm{i} = \underbrace{4a}_{\in\mathbb{R}} + (\underbrace{5 - 4b}_{\in\mathbb{R}})\,\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow\ \begin{cases} 2a - 4 = 4a \\ \text{et} \\ 2b = 5 - 4b \end{cases}$ (par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe)

$\Leftrightarrow\ \begin{cases} a = -2 \\ \text{et} \\ b = \frac{5}{6} \end{cases} \ \Leftrightarrow\ z = -2 + \frac{5}{6}\,\mathrm{i}$

• **f)** $z\,\overline{z} = z+2 \;\Leftrightarrow\; (a+b\,\mathrm{i})(a-b\,\mathrm{i}) = a+b\,\mathrm{i}+2 \;\Leftrightarrow\; a^2-(b\,\mathrm{i})^2 = a+2+b\,\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow\; \underbrace{a^2+b^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{0}_{\in\mathbb{R}}\,\mathrm{i} = \underbrace{a+2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{b}_{\in\mathbb{R}}\,\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2+b^2 = a+2 \\ \text{et} \\ b=0 \end{array}\right. \qquad \text{(par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe)}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2-a-2 = 0 \\ \text{et} \\ b=0 \end{array}\right.$$

Le discriminant de l'équation du second degré $a^2-a-2=0$ vaut $\Delta = 9 > 0$, donc celle-ci possède deux solutions réelles : $\frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$ et $\frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$. Ainsi :

$$z\,\overline{z} = z+2 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} (a=-1 \text{ ou } a=2) \\ \text{et} \\ b=0 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow\; (\; z = \underbrace{-1+0\,\mathrm{i}}_{-1} \quad \text{ou} \quad z = \underbrace{2+0\,\mathrm{i}}_{2}\;)$$

• **g)** $\overline{z}+1 = z\,\overline{z} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow\; a-b\,\mathrm{i}+1 = (a+b\,\mathrm{i})(a-b\,\mathrm{i}) + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow\; a+1-b\,\mathrm{i} = a^2-(b\,\mathrm{i})^2 + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow\; (\underbrace{a+1}_{\in\mathbb{R}}) + (\underbrace{-b}_{\in\mathbb{R}})\,\mathrm{i} = (\underbrace{a^2+b^2}_{\in\mathbb{R}}) + \underbrace{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}_{\in\mathbb{R}}\,\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+1 = a^2+b^2 \\ \text{et} \\ -b = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \qquad \text{(par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe)}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+1 = a^2+\dfrac{5}{4} \\ \text{et} \\ b = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2-a+\dfrac{1}{4} = 0 \\ \text{et} \\ b = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

L'équation du second degré $a^2-a+\dfrac{1}{4}=0$ a un discriminant égal à $\Delta = 0$. L'équation possède donc une unique solution réelle : $a = -\dfrac{-1}{2\times 1} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation de départ est $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{i}\right\}$.