TS6 *2017/2018*

Devoir à rendre mardi 16/10

A On considère la suite u définie par son terme initial $u_0 = 0$ et la relation de récurrence, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{2 - 2u_n}{u_n - 3}$.

On pourra utiliser sans démonstration le fait que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2-2x}{x-3}$ est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;3[$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Prouver, en raisonnant par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-1;0]$.
3. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 2)(u_n + 1)}{3 - u_n}$.
   En déduire le sens de variation de la suite u.
4. Redémontrer le sens de variation de la suite u en utilisant un raisonnement par récurrence (pour l'hérédité, utiliser la stricte croissance de f sur l'intervalle $]-\infty\,;3[$).
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 2}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{4u_n - 8}$.
   (b) En déduire que v est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{v_n - 1}$.
   (d) Conclure quant à la convergence de la suite u.

B On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{4^n}{n}$.

1. Prouver que pour tout réel $x \geqslant 1$, on a $4x^2 \geqslant (x+1)^2$.
2. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver que pour tout entier $n \geqslant 1$, $4^n \geqslant n^2$ (pour l'hérédité, on pourra utiliser le résultat précédent).
3. Conclure quant à la limite de la suite u.