

I) On a $F = \frac{u}{v}$ avec $u: x \mapsto -6x^3 + 6x^2 - 4x - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme et $v: x \mapsto (x+1)^4$ dérivable par somme et produit sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $]-1; +\infty[$.
Donc F est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et $F' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

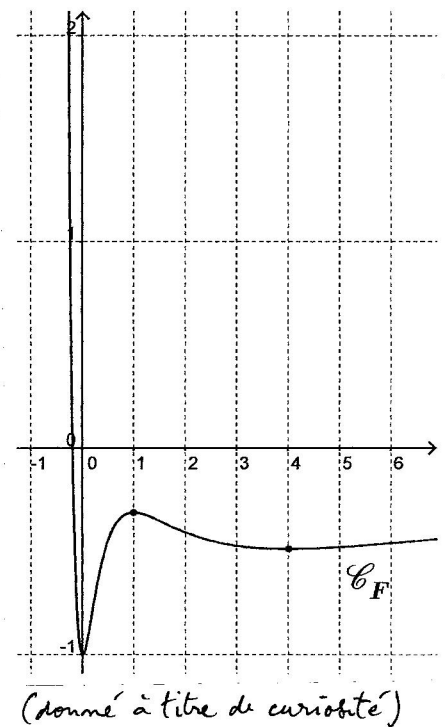
Comme $v = w^4$ avec $w: x \mapsto x+1$, on a $v' = 4 \times w' \times w^{4-1}$,
soit $v'(x) = 4 \times 1 \times (x+1)^3 = 4(x+1)^3$. Par conséquent,

$$F'(x) = \frac{(-18x^2 + 12x - 4)(x+1)^4 - 4(x+1)^3(-6x^3 + 6x^2 - 4x - 1)}{[(x+1)^4]^2}$$

$$\text{soit } F'(x) = \frac{(x+1)^3 [(x+1)(-18x^2 + 12x - 4) - 4(-6x^3 + 6x^2 - 4x - 1)]}{(x+1)^8}$$

$$= \frac{-18x^3 + 12x^2 - 4x - 18x^2 + 12x - 4 + 24x^3 - 24x^2 + 16x + 4}{(x+1)^{8-3}}$$

$$= \frac{6x^3 - 30x^2 + 24x}{(x+1)^5} = \frac{6x(x^2 - 5x + 4)}{(x+1)^5}$$



(donné à titre de curiosité)

Lorsque $x \in]-1; +\infty[$, on a $x > -1$, soit $x+1 > 0$ d'où $(x+1)^5 > 0$. Ainsi $F'(x)$ est du signe de $6x(x^2 - 5x + 4)$. L'étude (classique!) du trinôme $x^2 - 5x + 4$ prouve qu'il possède 2 racines : 1 et 4. En en déduit :

x	-1	0	1	4	$+\infty$
$6x$	-	0	+	+	+
$x^2 - 5x + 4$	+	+	0	-	+
$F'(x)$	-	0	+	0	+
F		-1	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{61}{125}$	

$x^2 - 5x + 4$ est du signe de $a = 1$ (c'est-à-dire positif) sauf entre les racines.

$$F(1) = \frac{-6 + 6 - 4 - 1}{(1+1)^4} = -\frac{5}{16}$$

$$F(4) = \frac{-384 + 96 - 16 - 1}{(4+1)^4} = -\frac{305}{625} = -\frac{61}{125}$$

II) 1) $f(x)$ n'est défini que lorsque $2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(2-x) \geq 0$. Un tableau de signe (détails laissés au lecteur) prouve alors que $D = [0; 2]$ et que pour tout $x \in]0; 2[$, on a $x(2-x) > 0$.

2) On a $f = uv$ avec $u: x \mapsto x-2$ et $v = \sqrt{w}$ où $w: x \mapsto 2x - x^2$.

w est dérivable (par produit et somme) et strictement positive sur $]0; 2[$ donc

v est dérivable sur $]0; 2[$ de dérivée $v' = \frac{w'}{2\sqrt{w}} : x \mapsto \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Comme u est également dérivable sur $]0; 2[$, f est dérivable par produit sur $]0; 2[$

$$\text{et } f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times \sqrt{2x-x^2} + (x-2) \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2} + (x-2)(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{2x-x^2+x-x^2-2+2x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{-2x^2+5x-2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

3) Lorsque $x \in]0; 2[$, on a $\sqrt{2x-x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x^2+5x-2$, trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = 9$ et qui possède donc les 2 racines : $x_1 = \frac{-5-\sqrt{9}}{-4} = 2$ et $x_2 = \frac{-5+\sqrt{9}}{-4} = \frac{1}{2}$. En en déduit :

x	0	$\frac{1}{2}$	2
$-2x^2+5x-2$	-	-	+
f	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

$$f(0) = (0-2)\sqrt{2 \times 0 - 0^2} = -2 \times 0 = 0$$

$$f(2) = (2-2)\sqrt{2 \times 2 - 2^2} = 0 \times 0 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}-2\right)\sqrt{2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

① $-2x^2+5x-2$ est du signe de $-(-2)=2$ entre ses racines.

4) T: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Or $f'(1) = \frac{-2+5-2}{\sqrt{2-1}} = 1$ et $f(1) = (1-2)\sqrt{2-1} = -1$

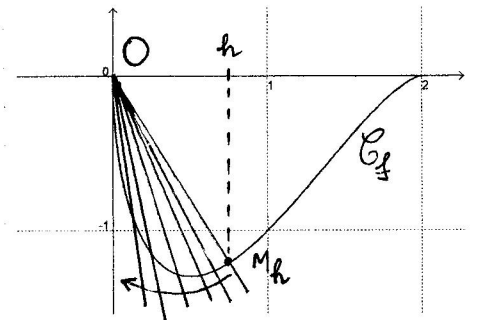
donc T: $y = 1 \times (x-1) + (-1)$ soit T: $y = x-2$.

5)a) Soit $h \in]0; 2]$; on a $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{(h-2)\sqrt{2h-h^2}}{h} = \frac{(h-2)\sqrt{h(2-h)}}{h}$

d'où $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{(h-2)\sqrt{h}\sqrt{2-h}}{h} = \frac{(h-2)\sqrt{2-h}}{\sqrt{h}}$. Lorsque h tend vers 0, le numérateur tend vers $(0-2)\sqrt{2-0} = -2\sqrt{2}$ et le dénominateur tend vers $\sqrt{0} = 0$ en restant strictement positif. Par conséquent $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ tend vers $-\infty$ lorsque h tend vers 0.

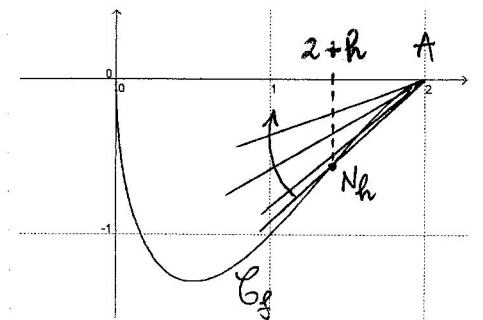
Or $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ est la pente de la droite (OM_h) , où M_h est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse h (voir ci-contre).

Comme la pente de (OM_h) tend vers $-\infty$ lorsque h tend vers 0, cela signifie que (OM_h) tend vers une position limite verticale. On dit que $\mathcal{C}_f$ possède une demi-tangente verticale au point O.



5)b) Soit $h \in [-2; 0[$; on a $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h-2)\sqrt{2(2+h)-(2+h)^2}}{h} = \frac{h\sqrt{-h^2-2h}}{h}$
soit $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \sqrt{-h^2-2h}$. Lorsque h tend vers 0, $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ tend donc vers $\sqrt{-0^2-2 \times 0} = \sqrt{0} = 0$. Or $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ est la pente

de la droite (AN_h) , où N_h est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $2+h$ et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2. La pente de (AN_h) tend donc vers 0, ce qui signifie que la droite (AN_h) tend vers une position limite horizontale lorsque h tend vers 0. On dit que $\mathcal{C}_f$ possède une demi-tangente horizontale au point A.



6)

