

T5 Correction de la fin de l'exercice n° 66 p 152 (d'après Inde, avril 2003)

- 3) b). $h: x \mapsto \frac{-x^3}{2(x+2)}$ est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne

s'annule pas sur $[0; 1]$ donc h est dérivable sur $[0; 1]$ et pour tout $x \in [0; 1]$:

$$h'(x) = \frac{-3x^2 \times 2(x+2) - 2 \times (-x^3)}{4(x+2)^2} = \frac{-6x^3 - 12x^2 + 2x^3}{4(x+2)^2} = \frac{-4x^3 - 12x^2}{4(x+2)^2} = -\frac{x^3 + 3x^2}{(x+2)^2};$$

on a $h'(0) = 0$ et si $x \in]0; 1]$, $h'(x) < 0$

donc h est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

$$h(0) = \frac{-0^3}{2(0+2)} = 0 \quad \text{et} \quad h(1) = \frac{-1^3}{2(1+2)} = -\frac{1}{6}$$

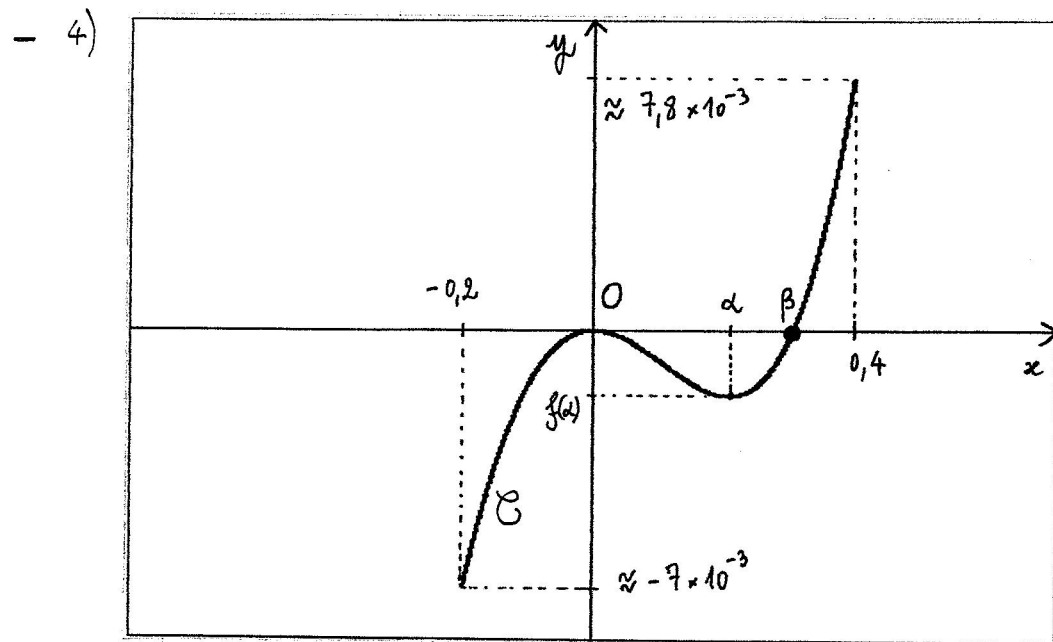
x	0	1
$h'(x)$	0	—
h	0	$\searrow -1/6$

• On a $0,2 < \alpha < 0,21$ donc par stricte décroissance de h sur $[0; 1]$, on obtient $h(0,2) > h(\alpha) > h(0,21)$, avec $h(0,2) = -\frac{1}{550}$ et $h(0,21) = -\frac{9261}{4420000}$, soit $-\frac{9261}{4420000} < f(\alpha) < -\frac{1}{550}$ (on a $-\frac{1}{550} \approx -1,8 \times 10^{-3}$ et $-\frac{9261}{4420000} \approx -2,1 \times 10^{-3}$)

- 3) c) La fonction f est continue (car dérivable d'après 2.a.) et strictement croissante sur $] \alpha; +\infty[$, $f(\alpha) < 0$ (voir encadrement précédent) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty^*$ donc $0 \in]f(\alpha); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$ et d'après le corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution β dans $] \alpha; +\infty[$.

D'après la calculatrice (méthode par balayage): $0,3 < \beta < 0,31$.

- 3) d) La deuxième conjecture ne tient pas car $\mathcal{C}$ est en dessous de (Ox) sur $]0; \beta[$.



* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \left(\frac{1}{e} e^x - \frac{1}{2} \right)$; on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc

par somme et produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.