

- I) 1) Si $x \in \mathbb{R}^*$, $x^4 + x + 1 = x^4 \left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)$. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ et par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$, d'où par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + x + 1) = +\infty$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, on déduit par composition que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^4 + x + 1} = +\infty$.
- 2) Si $x \geq 0$, on a $\sqrt{4x^2 + 11} - 2x = \frac{(\sqrt{4x^2 + 11} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 11} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 11} + 2x}$, soit :
- $$\sqrt{4x^2 + 11} - 2x = \frac{\sqrt{4x^2 + 11}^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2 + 11} + 2x} = \frac{4x^2 + 11 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 11} + 2x} = \frac{11}{\sqrt{4x^2 + 11} + 2x} \quad (*)$$
- On a $\sqrt{4x^2 + 11} \geq 0$ donc $\sqrt{4x^2 + 11} + 2x \geq 2x$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 11} + 2x) = +\infty$. On déduit par quotient (voir #) que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 11} - 2x) = 0$.
- 3) La fonction $x \mapsto x^2 + x + 4$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ (calculer Δ etc.) et dérivable sur $\mathbb{R}$, par somme. Par conséquent $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f': x \mapsto \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x + 4}}$. En particulier, f est dérivable en 3 et
- $$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3), \text{ soit } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - \sqrt{3^2 + 3 + 4}}{x - 3} = \frac{2 \times 3 + 1}{2\sqrt{3^2 + 3 + 4}}$$
- et finalement $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - 4}{x - 3} = \frac{7}{8}$.
- II) 1) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-9}$ est défini sauf lorsque $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x \in \{-3; 3\}$. Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$.
- 2) a). Si $x \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, on a $f(x) = \frac{\frac{1}{x} + 5 \times \frac{1}{x^2}}{1 - 9 \times \frac{1}{x^2}}$, donc par produit, somme et quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0 + 5 \times 0}{1 - 9 \times 0} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{0 + 5 \times 0}{1 - 9 \times 0} = 0$.
- Par somme, on a $\lim_{x \rightarrow -3} (x+5) = -3+5 = 2 > 0$ et par produit et somme $\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 9) = (-3)^2 - 9 = 0$; affignons cette dernière limite en dressant le tableau des signes de $x^2 - 9$ ($x \mapsto x^2 - 9$ est une fonction du second degré dont les racines sont -3 et 3) :
- | | | | | |
|-----------|-----------|------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -3 | 3 | $+\infty$ |
| $x^2 - 9$ | | + | 0 | - |
- (*) du signe de $a=1$
- On a donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} (x^2 - 9) = 0^+$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} (x^2 - 9) = 0^-$, et on déduit par quotient que $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} f(x) = -\infty$.
- Par somme, on a $\lim_{x \rightarrow 3} (x+5) = 3+5 = 8 > 0$ et par produit et somme, $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 3^2 - 9 = 0$. D'après le tableau de signes ci-dessus, on a plus précisément : $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (x^2 - 9) = 0^-$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (x^2 - 9) = 0^+$, et on déduit par quotient

que $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$.

2) a) On déduit des limites précédentes que les droites suivantes sont asymptotes à $\mathcal{C}$:
 - La droite d'équation $y=0$ (c'est-à-dire l'axe des abscisses) en $-\infty$ et en $+\infty$,
 - Les droites d'équations $x=-3$ et $x=3$.

3) f est dérivable sur $\mathcal{D}$ par somme et quotient et pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2-9) - 2x(x+5)}{(x^2-9)^2} = \frac{x^2-9-2x^2-10x}{(x^2-9)^2} = \frac{-x^2-10x-9}{(x^2-9)^2}$$

Si $x \in \mathcal{D}$, on a $(x^2-9)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-x^2-10x-9$, trinôme du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = 64 > 0$; celui-ci possède donc deux racines, égales à -1 et -9 (détail du calcul laissé au lecteur...). D'où :

x	$-\infty$	-9	-3	-1	3	$+\infty$
$-x^2-10x-9$		$-$ (°)	$+$	$+$ (°)	$-$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
f	0	$-\frac{1}{18}$	$+\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	0

(°) du signe de $a=-1$

$$f(-9) = \frac{-9+5}{(-9)^2-9} = \frac{-4}{72} = -\frac{1}{18}$$

$$f(-1) = \frac{-1+5}{(-1)^2-9} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

III) 1) a) $p: x \mapsto x^4 + 4x - 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par produit et somme) de dérivée $x \mapsto 4x^3 + 4$. Or si $x \in \mathbb{R}$, $4(x+1)(x^2-x+1) = 4(x^3-x^2+x+x^2-x+1)$, soit $4(x+1)(x^2-x+1) = 4(x^3+1) = 4x^3+4$.
 On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}, p'(x) = 4(x+1)(x^2-x+1)$.

1) b) Le trinôme x^2-x+1 a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2-x+1 > 0$ (du signe de $a=1$). Comme $4 > 0$, $p'(x)$ est donc du signe de $x+1$. D'où :

x	$-\infty$	α	-1	β	$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	
p	$+\infty$		-6		$+\infty$

$$p(-1) = (-1)^4 + 4 \times (-1) - 3 = -6$$

$$\text{Si } x \in \mathbb{R}^*, \text{ on a } p(x) = x^4 \left(1 - 4 \times \frac{1}{x} + 3 \times \frac{1}{x^4} \right)$$

On a par produit et somme :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - 4 \times \frac{1}{x} + 3 \times \frac{1}{x^4} \right) = 1 - 4 \times 0 + 3 \times 0 = 1 > 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 4 \times \frac{1}{x} + 3 \times \frac{1}{x^4} \right) = 1 - 4 \times 0 + 3 \times 0 = 1 > 0. \text{ Comme } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty, \text{ on obtient par produit } \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty.$$

1) c) p est strictement décroissante et continue (car dérivable) sur $]-\infty; -1]$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty, p(-1) = -6 \text{ donc } 0 \in [p(-1); \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)[\text{ et d'après le}$$

corollaire du T.V.I., l'équation $p(x)=0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $]-\infty; -1]$.

p est strictement croissante et continue (car dérivable) sur $]-1; +\infty[$,

$$p(-1) = -6, \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty \text{ donc } 0 \in]p(-1); \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)[\text{ et d'après le corollaire}$$

du T.V.I., l'équation $p(x)=0$ possède une unique solution β dans $]-1; +\infty[$.

• Bilan : l'équation $p(x)=0$ possède exactement deux solutions α et β dans $\mathbb{R}$.

La calculatrice fournit: $-1,79 < \alpha < -1,78$ et $0,69 < \beta < 0,7$

1) d) En déduisant du tableau des variations de p (complété), le signe de $p(x)$:

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$	
$p(x)$	+	0	-	0	+

2) a) • Notons que $x \mapsto x^4 + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (si $x \in \mathbb{R}$, on a $x^4 \geq 0$ donc $x^4 + 1 \geq 1$). La fonction $f: x \mapsto \frac{x^3 + 1}{x^4 + 1}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme et quotient et: $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3x^2(x^4 + 1) - 4x^3(x^3 + 1)}{(x^4 + 1)^2} = \frac{3x^6 + 3x^2 - 4x^6 - 4x^3}{(x^4 + 1)^2}$,

$$\text{soit } f'(x) = \frac{-x^6 - 4x^3 + 3x^2}{(x^4 + 1)^2} = \frac{-x^2(x^4 + 4x - 3)}{(x^4 + 1)^2} = \frac{-x^2 p(x)}{(x^4 + 1)^2}$$

2) b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x^4 + 1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2 p(x)$, d'où:

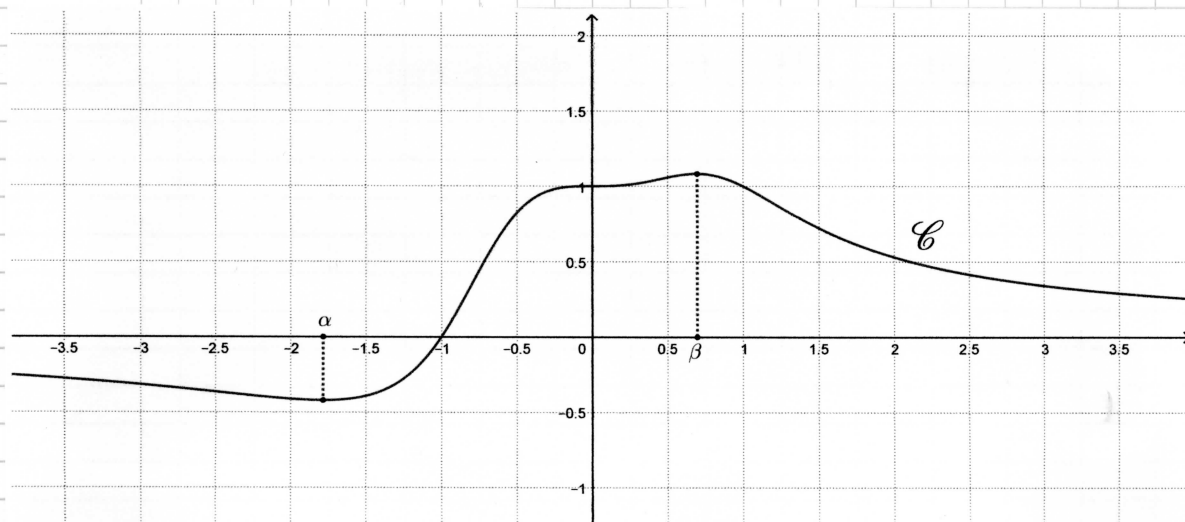
x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$-x^2$	-	-	0	-	-
$p(x)$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f		$f(\alpha)$		$f(\beta)$	

voir représentation graphique de f
donnée ci-dessous (à titre indicatif)

2) c) D'après le tableau des variations précédent, f possède un maximum en β , égal à $f(\beta)$. Montrons que $f(\beta) = \frac{3}{4\beta}$, en raisonnant par équivalences logiques:

$$f(\beta) = \frac{3}{4\beta} \Leftrightarrow \frac{\beta^3 + 1}{\beta^4 + 1} = \frac{3}{4\beta} \Leftrightarrow 4\beta(\beta^3 + 1) = 3(\beta^4 + 1) \Leftrightarrow 4\beta^4 + 4\beta = 3\beta^4 + 3$$

$\Leftrightarrow \beta^4 + 4\beta - 3 = 0 \Leftrightarrow p(\beta) = 0$: ce qui est vrai car β est une solution de l'équation $p(x) = 0$. Par conséquent on a bien $f(\beta) = \frac{3}{4\beta}$.



Correction du BONUS

- **A)** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \underbrace{f(x^{2017})}_{f[a(x)]} - \underbrace{x^{1008}}_{b(x)} \underbrace{f(x^{1009})}_{f[d(x)]}$.

Par composition, produit et somme, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$g'(x) = \underbrace{2017 x^{2016} f'(x^{2017})}_{a'(x) \times f'[a(x)]} - [\underbrace{1008 x^{1007}}_{b'(x)} \underbrace{f(x^{1009})}_{f[d(x)]} + \underbrace{x^{1008}}_{b(x)} \times \underbrace{1009 x^{1008} f'(x^{1009})}_{d'(x) \times f'[d(x)]}].$$

On obtient en particulier $g'(1) = 2017 f'(1) - 1008 f(1) - 1009 f'(1) = 0$ (car $f(1) = f'(1)$).

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^{2017}) - x^{1008} f(x^{1009})}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = 0$.

- **B)** Soit f une fonction vérifiant (i) et (ii).

Fixons x dans $\mathbb{R}$.

Si $h \in \mathbb{R}$, d'après (i) on a $f(x+h) \leq f(x) + f(h)$ et $f(x) = f[x+h+(-h)] \leq f(x+h) + f(-h)$, donc $-f(-h) \leq f(x+h) - f(x) \leq f(h)$.

— Si $h > 0$, on obtient : $\frac{f(-h)}{-h} \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(h)}{h}$ (1). Or d'après (ii), $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} =$

1 et comme $\lim_{h \rightarrow 0} (-h) = 0$, on obtient également par composition $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h)}{-h} = 1$. D'après le

Théorème des Gendarmes appliqué à (1), on en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1$ (2).

— Si $h < 0$, on obtient : $\frac{f(-h)}{-h} \geq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq \frac{f(h)}{h}$ et un raisonnement identique

prouve que $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1$ (3).

On déduit de (2) et (3) que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1$, ce qui prouve que f est dérivable en x et que $f'(x) = 1$.

Finalement, comme le choix du réel x au départ est arbitraire, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1$. Cela établit que f est forcément la fonction $x \mapsto x$ [réciproquement, celle-ci vérifie bien (i) et (ii)].