

Dressons le tableau des variations de $f: x \mapsto \frac{x-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ sur $]0; +\infty[$.

- On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1$ (par somme) et $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$ donc par

quotient, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$. Finalement, par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. (1)

- Si $x > 0$, $f(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 1$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 0 - 0 = 0$ (par somme) d'où par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \times 1 = 0$ (2)

- On a $f = uv$ avec $u: x \mapsto \frac{x-1}{x^2}$ et $v: x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$. u est dérivable sur $]0; +\infty[$ par somme et quotient et v également, par composition. Par conséquent, f est dérivable par produit sur $]0; +\infty[$ et $f' = u'v + uv'$, soit pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1 \times x^2 - 2x(x-1)}{(x^2)^2}}_{u'(x)} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{v(x)} + \underbrace{\frac{x-1}{x^2}}_{u(x)} \times \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right)}_{v'(x)^*}$$

* détail: $v = e^w$ avec $w: x \mapsto \frac{1}{x}$
donc $v' = w' e^w$, soit
 $v'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

d'où $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x}{x^4} e^{\frac{1}{x}} - \frac{x-1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} = \frac{-x^2 + x + 1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$.

Comme $x^4 > 0$ et $e^{\frac{1}{x}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + x + 1$, trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = 5 > 0$ et qui possède deux racines: $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; celui-ci est du signe de $a = -1$, sauf entre les deux racines précédentes, d'où:

x	0	φ	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$f(\varphi)$	0

(3)

- La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 a pour pente $f'(1) = \frac{-1^2 + 1 + 1}{1^4} e^{\frac{1}{1}} = e$ (4)



a) VRAI : voir (1)

b) VRAI : voir (2)

c) FAUX : voir (3)

d) VRAI : voir (4)

Remarque: pour répondre à la question c), il n'était en fait pas nécessaire d'étudier les variations de f ... En effet, il suffisait de constater par exemple que $f(2) > f(3)$ [$f(2) \approx 0,41$ et $f(3) \approx 0,31$], inégalité qui à elle seule permet d'affirmer que f n'est pas croissante sur $]0; +\infty[$ (car $2 < 3$).