Exercices supplémentaires : feuille n°1

I **a)** On note $Z = \sqrt{2-\sqrt{2}} - \mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Calculer Z^{2015}.

b) On pose $Z = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}} + \mathrm{i}\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}$. Calculer Z^{2016}.

II Soit ω un nombre complexe différent de 1 tel que $\omega^7 = 1$ (on admet qu'il existe bien un tel nombre complexe). On note $S = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
Montrer que $T = \overline{S}$ et calculer $\mathfrak{Re}(S)$ et $|\mathfrak{Im}(S)|$.

III Résoudre le système d'équations d'inconnues complexes u et v :

$$\begin{cases} u^3 = 3u + 7v \\ v^3 = 7u + 3v \end{cases}$$

IV Soit a, b et c trois réels strictement positifs tels que $a+b+c=1$.
Montrer que : $\dfrac{1}{a(2-a)+bc} + \dfrac{1}{b(2-b)+ac} + \dfrac{1}{c(2-c)+ab} \geqslant 4,5$.

V Soient n un entier naturel impair, $(x_1;\cdots;x_n)$ une liste de n réels distincts et $(y_1;\cdots;y_n)$ une permutation* de cette liste.
On suppose que : $|x_1 - y_1| = \cdots = |x_n - y_n|$.

1) Montrer que pour tout entier $k \in [1;n]$, $x_k = y_k$.
2) Le résultat subsiste-t-il si n est pair ?

VI Soit un carré de côté 1. Montrer que si 9 points sont intérieurs au carré, il existe un triangle formé avec trois des points précédents dont l'aire est inférieure à $\frac{1}{8}$.

VII Soient a, b et c trois réels tels que $a+b+c=0$.

1) Montrer que $a^3+b^3+c^3 = 3abc$.
2) Montrer que $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} \times \dfrac{a^5+b^5+c^5}{5} = \dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}$. La réciproque est-elle vraie ?

VIII Soit f une fonction définie sur $[0\,;1]$. On suppose que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \geqslant 0$ et que $f(1) = 1$. De plus si a et b sont deux réels positifs tels que $a+b \leqslant 1$, alors $f(a+b) \geqslant f(a) + f(b)$.

a) Prouver que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \leqslant 2x$
b) Est-il également vrai que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \leqslant 1,9x$?

(*) Une permutation d'une liste s'obtient en changeant *éventuellement* l'ordre des termes de cette liste. Par exemple $(1;-2;4;0)$ est une permutation de la liste $(0;-2;1;4)$.