Exercice 2

Partie 1

1. On a $g(x) = e^x - xe^x + 1$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, donc par somme des limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.
   On a $g(x) = e^x(1-x)+1$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$, donc par produit des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
2. La fonction g, somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$:
   $g'(x) = e^x - (1 \times e^x + x \times e^x) + 0 = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$.
   Pour tout x réel , $e^x > 0$,donc $g'(x)$ est du signe de $-x$.
   g est donc strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0		$-$		
g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3. (a) - Sur $[0\ ;\ +\infty[$, g est continue et strictement décroissante, $g(0) = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et $0 \in]-\infty; 2]$ donc d'après le corollaire des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in [0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   - Pour tout x de $]-\infty\ ;\ 0]$, on a $g(x) > 1$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-\infty\ ;\ 0]$
   - Bilan : l'équation $g(x) = 0$ possède pour unique solution α dans $\mathbb{R}$.

   (b) La calculatrice donne $g(1,27) \approx 0,04$ et $g(1,28) \approx -0,007$, donc $g(1,28) < g(\alpha) = 0 < g(1,27)$, ce qui prouve que $1,27 < \alpha < 1,28$ par stricte décroissance de g sur $[0; +\infty[$.

   (c) On a $g(\alpha) = 0 \iff e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0 \iff e^\alpha(1-\alpha) = -1 \iff e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
4. D'après le tableau des variations de g (complété), on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie 2

1. On a $A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x = -\infty$ et par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x + 1) = 0 + 1 = 1$, donc par quotient : $\lim\limits_{x\to-\infty} A(x) = -\infty$.
   Pour $x \neq 0$, on a $A(x) = \dfrac{4}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ et finalement par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = 0$.

2. La fonction A, quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annulant pas), est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $A'(x) = \dfrac{4\left(e^x+1\right) - 4x \times e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = \dfrac{4\left(e^x - xe^x + 1\right)}{\left(e^x+1\right)^2} = \dfrac{4g(x)}{\left(e^x+1\right)^2}$.
   Comme $\left(e^x+1\right)^2 > 0$ quel que soit x, le signe de $A'(x)$ est celui de $g(x)$.
3. On en déduit (voir partie 1, question 4) :

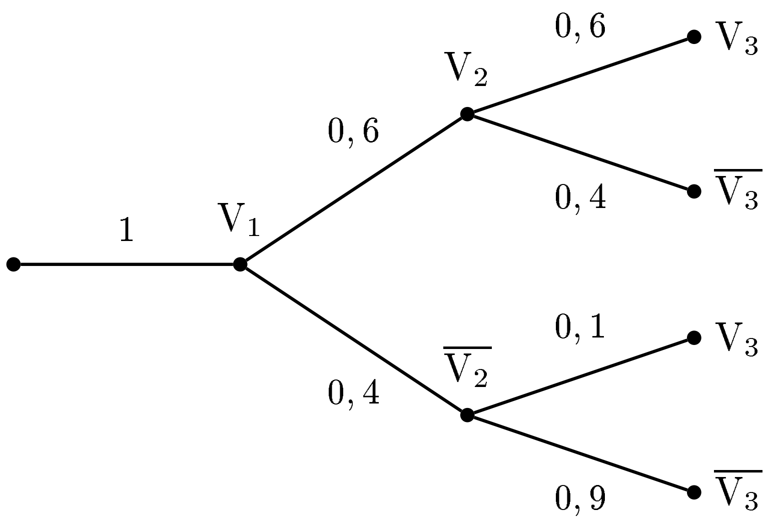
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
A	$-\infty$	$\nearrow$	$A(\alpha)$	$\searrow$	0

Partie 3

On sait que $x \geqslant 0$, donc l'aire du rectangle OPMQ est égale à $x \times f(x) = \dfrac{4x}{e^x+1} = A(x)$. Or d'après son tableau des variations, la fonction A présente un maximum en α égal à $\mathscr{S} = A(\alpha) = \dfrac{4\alpha}{e^\alpha+1}$. Comme $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$ (Cf partie 1, 3.c.), on a donc $\mathscr{S} = \dfrac{4\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1} = \dfrac{4\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+\frac{\alpha-1}{\alpha-1}} = \dfrac{4\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = 4\alpha\dfrac{(\alpha-1)}{\alpha} = 4(\alpha-1)$.
Comme $1,27 < \alpha < 1,28$, on en déduit que $0,27 < \alpha - 1 < 0,28$, d'où $4 \times 0,27 < 4(\alpha-1) < 4 \times 0,28$ (vu que $4 > 0$), soit $1,08 < \mathscr{S} < 1,12$.

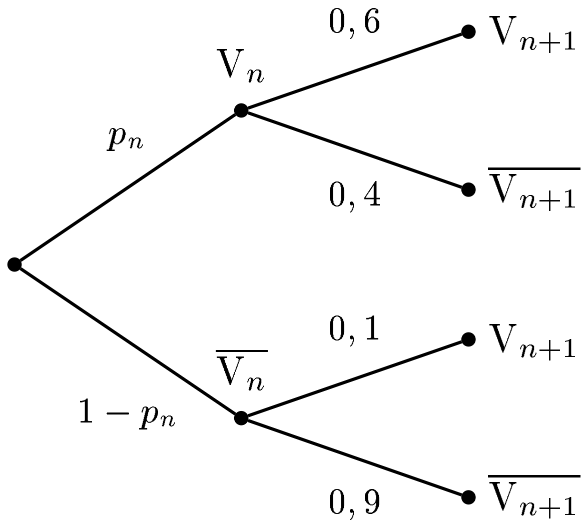
Exercice 3
Commun à tous les candidats

1. Voici l'arbre complété en fonction des données de l'énoncé :



2. $p(V_1) = 1$, donc $p_{V_1}(V_2) = p(V_2)$.
   Donc les évènements V_1et V_2 sont indépendants.
3. (a) A : « les 2ᵉ et 3ᵉ sondages sont positifs » ;
   D'après l'énoncé $p(V_2) = 0,6$ et $p_{V_2}((V_3) = 0,6$.
   Donc $p(V_2 \cap V_3) = p(V_2) \times p_{V_2}(V_3) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

   (b) B : « les 2ᵉ et 3ᵉ sondages sont négatifs ».
   On a $p(V_2) = 0,6$donc $p\left(\overline{V_2}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$ et d'après l'énoncé $p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,9$.
   Donc $p\left(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.
4. On a $p_3 = p(V_3) = p(V_3 \cap V_2) + p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right)$.
   Or $p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}(V_3) = 0,4 \times (1 - 0,9) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$.
   Conclusion : $p_3 = 0,36 + 0,04 = 0,4$.
5. $P(V_3) = 0.4$et $p_{V_2}(V_3) = 0.6$.
   Donc les évènements V_3et V_2ne sont pas indépendants.
6. $p_{\overline{V_3}}(\overline{V_2}) = \dfrac{p\left(\overline{V_3} \cap \overline{V_2}\right)}{p(\overline{V_3})}$.
   $p\left(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$
   et $p(\overline{V_3} = 1 - p(V_3) = 1 - 0.4 = 0.6$
   Donc $p_{\overline{V_3}}(\overline{V_2}) = \dfrac{0.36}{0.6} = 0.6$
7. Voici l'arbre complété en fonction des données de l'énoncé :



8. On a (ce que l'on peut voir sur l'arbre) :
   $p_{n+1} = p\left(V_{n+1}\right) = p\left(V_{n+1} \cap V_n\right) + p\left(V_{n+1} \cap \overline{V_n}\right) = p_n \times 0,6 + (1 - p_n) \times 0,1 = 0,6p_n - 0,1p_n + 0,1 = 0,5p_n + 0,1$.

9. (a) Pour tout entier naturel n non nul,
   $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n + 0,1 - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5\left(p_n - 0,2\right) = 0,5u_n$.
   Cette égalité montre que la suite u est une suite géométrique de raison $0,5$; son premier terme est $u_1 = p_1 - 0,2 = 1 - 0,2 = 0,8$.

   (b) On sait que pour tout entier naturel n non nul
   $u_n = u_1 \times r^{n-1} = 0,8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{0,8}{2^{n-1}}$.
   De la définition de u_n il résulte que $p_n = 0,2 + \dfrac{0,8}{2^{n-1}}$.

   (c) On sait que $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ entraîne que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{0,8}{2^{n-1}} = 0$,
   donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,2$.

Exercice 4

pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Étude de propriétés de la fonction f

   (a) Sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

   $$f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2} > 0; \quad \text{la fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur } [0\ ;\ +\infty[$$

   (b) Résolution dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation $f(x) = x$:

   $$f(x) = x \iff 6 - \frac{5}{x+1} = x \iff \frac{6x+6-5}{x+1} = x \iff 6x+1 = x^2 + x \iff x^2 - 5x - 1 = 0$$

   $$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 29; \quad \text{donc} \begin{cases} \alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2} \simeq 5,193 \in [0\ ;\ +\infty[\\ \beta = \frac{5-\sqrt{29}}{2} \simeq -0,193 \notin [0\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$.

   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

   $$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

   (a) Conjectures : la suite (u_n) est croissante et converge vers α.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

   $\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$:

   - **initialisation :** $u_0 = 0$ et $u_1 = 1 \Longrightarrow 0 \leqslant u_0 = 0 \leqslant u_1 = 1 \leqslant \alpha \simeq 5,193$
   - **hérédité :**Supposons que pour un n donné, on ait : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$. La fonction f étant croissante sur $[0\,;\,\alpha]$:

     $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha \iff 0 < 1 = f(0) \leqslant u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leqslant \alpha = f(\alpha)$$

   - **conclusion :** $\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

   (c) La suite (u_n) étant croissante et majorée par α, elle est convergente vers ℓ.

   La fonction f étant continue sur $[0\,;\,\alpha]$, ℓ vérifie :

   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = u_{n+1} = f(\ell) \Longrightarrow f(\ell) = \ell$$

   Nous savons que seul α vérifie $f(x) = x$ sur $[0\,;\,+\infty[$. Ainsi :

   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$$

(d) Initialement, U prend la valeur de u_0 et J prend la valeur du premier rang 0.

Vu que le premier terme de la suite n'est pas une valeur approchée de α à 10^{-K} près, il faut calculer le terme suivant à l'aide de la relation de récurrence définissant la suite (u_n) et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un terme de la suite soit une valeur approchée de α à 10^{-K} près,ce qui est sûr d'arriver car α est la limite de la suite (u_n).

La variable J stocke le nombre d'itérations effectuées au cours de l'algorithme. C'est pourquoi quand l'algorithme s'arrête, l'affichage de J nous fournit le rang du premier terme donnant une valeur approchée de α à 10^{-K} près,

3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0

   - Si $u_0 \in [o\,;\,\alpha[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers α.
   - Si $u_0 = \alpha$, la suite est constante et égale à α.
   - Si $u_0 \in]\alpha\,;\,+\infty[$, la suite est décroissante et converge vers α.

   Les démonstrations se font de la même manière que pour $u_0 = 0$.