Épreuve de Mathématiques

Série S
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
Février 2014
Durée de l'épreuve : 4 heures

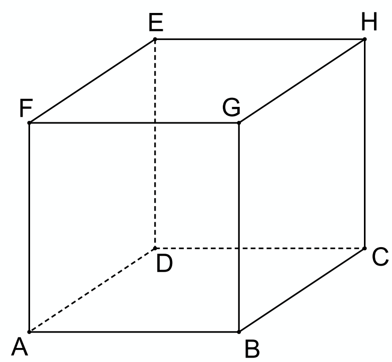
Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6 .
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'utilisation de la calculatrice est autorisée.
L'usage du téléphone portable, y compris en tant que montre ou calculatrice, est strictement interdit.
Le prêt ou l'échange de calculatrice en cours d'épreuve est strictement interdit.

Chaque exercice sera traité sur une feuille séparée.

Exercice 1 : ______________________________ 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

Partie 1 : Soit ABCDEFGH un cube. Les points I, J et K désignent les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [EF].



1. La section du plan (IJK) avec le cube ABCDEFGH est :

   a) un triangle **b)** un quadrilatère **c)** un pentagone **d)** un hexagone

2. Les droites (IK) et (BH) sont :

   a) parallèles **b)** sécantes **c)** non coplanaires **d)** autre réponse

3. Laquelle de ces droites est parallèle au plan (IJK) ?

   a) (AH) **b)** (DC) **c)** (BH) **d)** (EB)

4. Lequel des ces points appartient au plan (IJK) ?

   a) le symétrique de G par rapport à H **b)** le symétrique de D par rapport à E
   c) le symétrique du milieu de [FG] par rapport à F **d)** le centre de gravité du triangle EFH

Partie 2 : Dans le plan complexe on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M$'$ d'affixe z' telle que $z' = i\overline{z} + 1$.

1. $\overline{z'}$ est égal à :

   a) $iz - 1$ **b)** $-iz - 1$ **c)** $iz + 1$ **d)** $-iz + 1$

2. L'image du point d'affixe $\dfrac{3i}{1-i}$ a pour affixe :

   a) $\dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}i$ **b)** $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ **c)** $\dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}i$ **d)** $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

3. L'antécédent du point d'affixe $\dfrac{3i}{1-i}$ a pour affixe :

   a) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}i$ **b)** $\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}i$ **c)** $\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}i$ **d)** $\dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}i$

4. l'ensemble des points M lorsque z' est un imaginaire pur, est décrit par :

   a) L'axe des abscisses **b)** L'axe des ordonnées
   c) La droite d'équation $y = -1$ **d)** Aucune réponse correcte

Exercice 2 : ______ 6 points

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Dresser, en justifiant, le tableau des variations de g.
3. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   c) Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Déterminer les limites de A en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
3. Dresser le tableau des variations de la fonction A sur $\mathbb{R}$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.
L'annexe 1 donne la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

- M le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$,
- P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,
- Q le point de coordonnées $(0\ ;\ f(x))$.

Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α et que cette aire maximale $\mathscr{S}$ est égale à $4(\alpha - 1)$. Donner enfin un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-1} de $\mathscr{S}$.
On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.

Exercice 3 : ______ 5 points

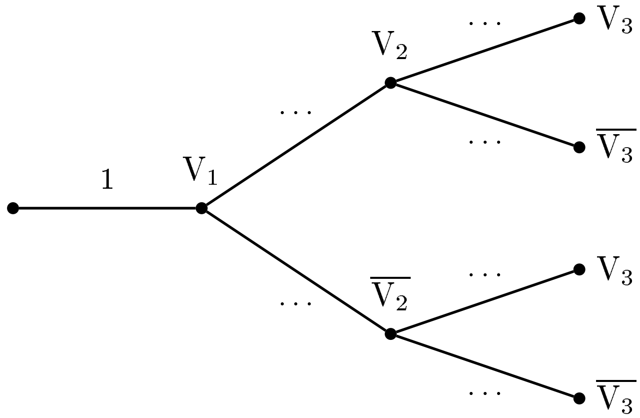
Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.
Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

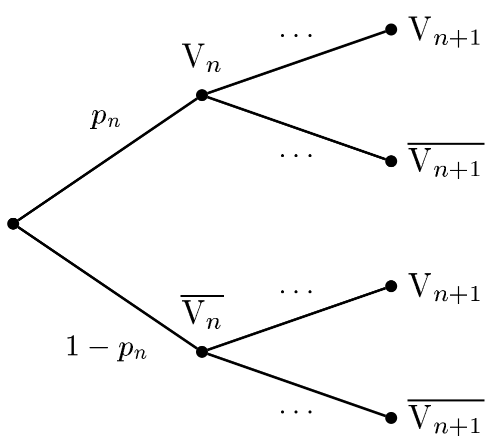
- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre suivant en fonction des données de l'énoncé :



2. Les évènements V_1 et V_2 sont-ils indépendants ?
3. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   a) A : « les 2e et 3e sondages sont positifs » ;
   b) B : « les 2e et 3e sondages sont négatifs ».
4. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3e sondage soit positif .
5. Les évènements V_2 et V_3 sont-ils indépendants ?
6. Sachant que le 3e sondage est négatif, calculer la probabilité d'avoir eu un 2e sondage négatif .
7. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



8. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
9. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.
   a) Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
   b) Exprimer p_n en fonction de n.
   c) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

Exercice 4 : ________ 5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right)$$

1. Étude de propriétés de la fonction f :
   a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.
   On note α la solution.
2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$:
   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}$$

   a) Sur le graphique représenté dans l'annexe 2, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
   Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\ ;\ 0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives $u_1,\ u_2,\ u_3$ et u_4.
   Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?
   b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel $n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
   d) On considère l'algorithme suivant :

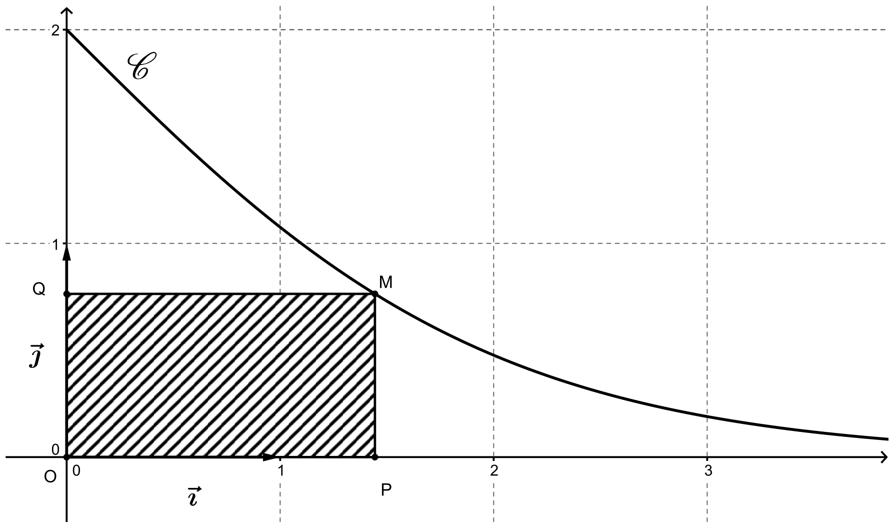
Variables	J et K sont des entiers naturels , U est un réel
Initialisation	U prend la valeur 0 ; J prend la valeur 0
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $\alpha - \text{U} > 10^{-\text{K}}$ J prend la valeur .... U prend la valeur .... Fin Tant que
Sortie	Afficher J

   Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il donne le rang du premier terme de la suite (u_n) donnant une valeur approchée de α à $10^{-\text{K}}$ près.
   Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?
3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0
   Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?

Annexe à rendre avec la copie | **Numéro de candidat :**

Annexe 1 :



Annexe 2 :