TS1 *2013/2014*

NOM : _____________________

Contrôle n°5 de Mathématiques

I Le but de l'exercice est d'étudier les variations de la fonction :

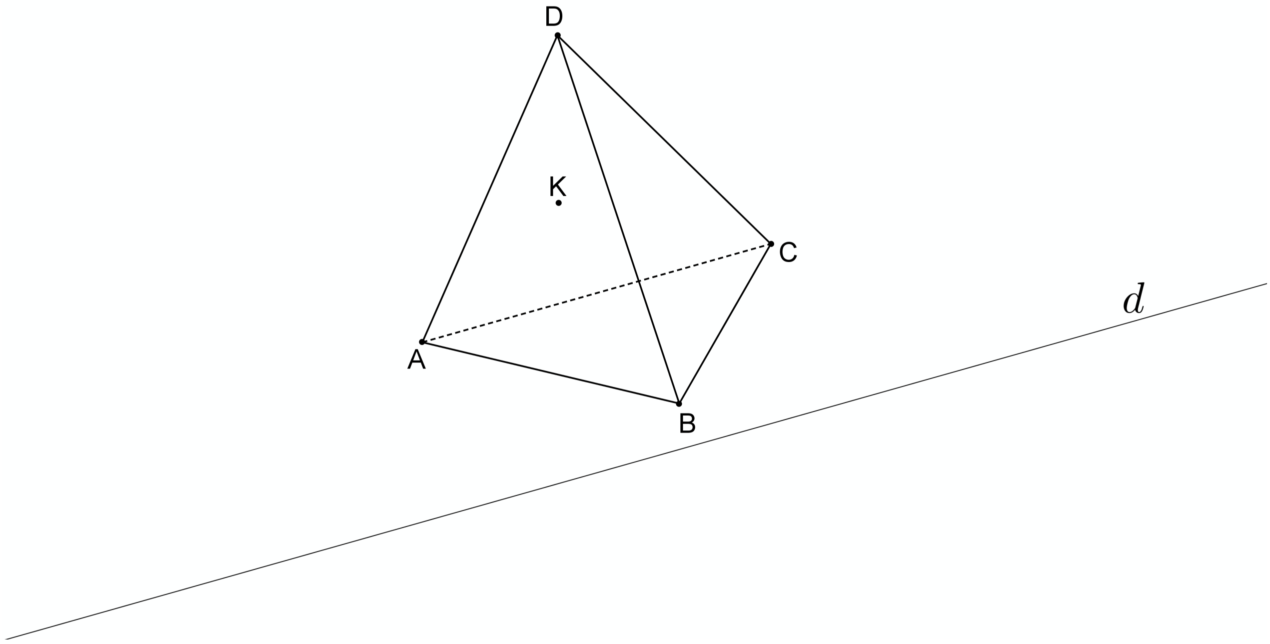
$$f : x \mapsto (x^2 - 9x - 4)\sqrt{x^2+2}\ .$$

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - 6x^2 - 6$.
   (a) Dresser le tableau des variations de h sur $\mathbb{R}$.
   (b) Prouver qu'il existe un unique réel α tel que $h(\alpha) = 0$. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   (c) Déterminer le signe de $h(x)$ en fonction des valeurs du réel x.
2. (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{3h(x)}{\sqrt{x^2+2}}$.
   (c) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

II Le but de l'exercice est de calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$.
L'intervalle $[-\pi;\pi]$ sera noté I.

1. Soit la fonction f définie sur I par $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$.
   On note $g = f'$ la fonction dérivée de f sur I.
   (a) Étudier les variations de g sur I. En déduire le tableau de signes de g sur I.
   (b) Dresser le tableau des variations de f sur I.
   En déduire que pour tout $x \in$ I, on a : $\cos x \geqslant 1 - \frac{1}{2}x^2$.
2. Soit la fonction m définie sur I par $m(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$.
   On note $n = m'$ la fonction dérivée de m sur I.
   (a) Prouver que pour tout $x \in$ I, $n'(x) = -f(x)$. Déduire du 1)b) les variations de n sur I puis son tableau de signes.
   (b) Dresser le tableau des variations de m sur I.
   En déduire que pour tout $x \in$ I, on a $\cos x \leqslant 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$.
3. Utiliser les résultats obtenus en 1)b) et 2)b) pour justifier l'existence de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ et calculer sa valeur.

III ABCD est un tétraèdre de l'espace et K un point appartenant au plan (ACD). Soit d une droite incluse dans le plan (ABC) et parallèle à la droite (AC) ; on note $\mathscr{P}$ le plan contenant d et passant par le point K.



1. (a) Construire la droite d'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec le plan (ACD).
   (b) Construire les droites d'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec les plans (ABD) et (BCD).
   (c) Hachurer la section du tétraèdre (ABCD) par le plan $\mathscr{P}$.
2. Justifier les constructions précédentes.