Correction du contrôle de Mathématiques n°5

I

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme et si $x \in \mathbb{R}$:
   $f'(x) = 2x \times \mathrm{e}^x + x^2 \times \mathrm{e}^x - x = x\mathrm{e}^x(x+2) - x = xg(x)$.

2. (a) • Par somme, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc par produit et somme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
   • On a $g(x) = x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 1$. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc par produit et somme $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0 + 2 \times 0 - 1 = -1$.

   (b) (c) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme et produit et si $x \in \mathbb{R}$:
   $g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x+2) \times \mathrm{e}^x - 0 = (x+3)\mathrm{e}^x$.
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x+3$, d'où :

x	$-\infty$		-3		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
g	-1	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}^3} - 1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   (Détail : $g(-3) = (-3+2)\mathrm{e}^{-3} - 1 = -\frac{1}{\mathrm{e}^3} - 1$.)

3. (a) • D'après son tableau des variations, g est majorée par -1 sur $]-\infty; -3]$ donc l'équation $g(x) = 0$ ne possède aucune solution dans cet intervalle.
   • La fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $]-3; +\infty[$, $g(-3) = -\frac{1}{\mathrm{e}^3} - 1 < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Comme $0 \in \left]-\frac{1}{\mathrm{e}^3} - 1; +\infty\right[$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires prouve que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $]-3; +\infty[$.
   • Bilan : les deux points précédents montrent que l'équation $g(x) = 0$ possède pour unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   • On a $g(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-1} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}} - 1 < 0$ et $g(0) = (0+2)\mathrm{e}^0 - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$. Or $g(\alpha) = 0$ donc $g(-1) < g(\alpha) < g(0)$, ce qui prouve que $-1 < \alpha < 0$ par stricte croissance de la fonction g sur $[-3; +\infty[$.

   (b) Algorithme complété :

Initialisation	Le réel a prend la valeur de -1, Le réel b prend la valeur de 0,
Traitement	Tant que $(b-a) \geqslant 0,01$: | Si $g(a) \times g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant 0$, alors : | | b prend la valeur de $\frac{a+b}{2}$ | Fin Si | Sinon : | | a prend la valeur de $\frac{a+b}{2}$ | Fin Sinon Fin Tant que
Sortie	Afficher les valeurs de a et de b.

(c) La calculatrice fournit : $-0,45 < \alpha < -0,44$.

(d) D'après le tableau des variations de g (complété), on déduit :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

4. (a) D'après 1), on a $f'(x) = xg(x)$, d'où :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\alpha^3}{2(\alpha+2)}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(Limites et valeurs justifiées dans les questions qui suivent.)

(b) On a $g(\alpha) = 0$ donc $(\alpha+2)\mathrm{e}^{\alpha} - 1 = 0$, soit $\mathrm{e}^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+2}$. On en déduit que : $f(\alpha) = \alpha^2 \times \frac{1}{\alpha+2} - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{2\alpha^2 - \alpha^2(\alpha+2)}{2(\alpha+2)} = -\frac{\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

(c) Notons que $f(x) = x^2\left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\right)$.

• On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et par somme $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\right) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\right) = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Cf question 4)a) pour le tableau des variations.

$\boxed{\text{II}}$ Partie A : Restitution organisée de connaissances

Posons $Z = z_1 z_2$. On a $|Z|^2 = Z\overline{Z}$ donc $|z_1z_2|^2 = z_1z_2 \times \overline{z_1z_2}$. Or $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ donc $|z_1z_2|^2 = z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2} = z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 \times |z_2|^2$. Finalement $|z_1z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2$ donc $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$, vu que $|z_1z_2|$ et $|z_1||z_2|$ sont tous les deux positifs.

Partie B : Étude d'une transformation particulière

1. (a) On a $z_{\mathrm{C}'} = \dfrac{1 - z_{\mathrm{C}}}{\overline{z_{\mathrm{C}}} - 1} = \dfrac{1 + 2 - \mathrm{i}}{-2 - \mathrm{i} - 1} = \dfrac{3 - \mathrm{i}}{-3 - \mathrm{i}} = \dfrac{(3 - \mathrm{i})(-3 + \mathrm{i})}{(-3 - \mathrm{i})(-3 + \mathrm{i})}$, soit :
   $z_{\mathrm{C}'} = \dfrac{-9 + 3\,\mathrm{i} + 3\,\mathrm{i} + 1}{(-3)^2 - \mathrm{i}^2} = \dfrac{-8 + 6\,\mathrm{i}}{9 + 1} = -0,8 + 0,6\,\mathrm{i}$.

   (b) On a $|z_{\mathrm{C}'}| = \sqrt{(-0,8)^2 + 0,6^2} = \sqrt{0,64 + 0,36} = \sqrt{1} = 1$ donc $\mathrm{OC}' = 1$, ce qui prouve que C' appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

   (c) $\dfrac{z_{\mathrm{C}'} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}} = \dfrac{-0,8 + 0,6\,\mathrm{i} - 1}{-2 + \mathrm{i} - 1} = \dfrac{-1,8 + 0,6\,\mathrm{i}}{-3 + \mathrm{i}} = \dfrac{0,6(-3 + \mathrm{i})}{-3 + \mathrm{i}} = 0,6 \in \mathbb{R}$ donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}; \overrightarrow{\mathrm{AC}'}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{C}'} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}\right) \equiv \arg(0,6) \equiv 0\,[2\pi]$, ce qui prouve que les points A, C et C' sont alignés.

2. Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$. $\mathrm{M}(z) \in \Delta \Leftrightarrow \dfrac{1 - z}{\overline{z} - 1} = z_{\mathrm{A}} \Leftrightarrow \dfrac{1 - z}{\overline{z} - 1} = 1 \Leftrightarrow 1 - z = \overline{z} - 1$ (car $z \neq 1$) $\Leftrightarrow z + \overline{z} = 2 \Leftrightarrow 2\,\mathfrak{Re}(z) = 2 \Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z) = 1$. Finalement, M appartient à Δ si et seulement si son abscisse vaut 1. Δ est donc la droite d'équation $x = 1$, privée du point A.

3. Notons que $\overline{z} - 1 = \overline{z} - \overline{1} = \overline{z - 1}$ donc $\mathrm{OM}' = |z'| = \left|\dfrac{1 - z}{\overline{z} - 1}\right| = \dfrac{|1 - z|}{|\overline{z} - 1|} = \dfrac{|1 - z|}{\left|\overline{z - 1}\right|} = \dfrac{|1 - z|}{|z - 1|}$ (car si $Z \in \mathbb{C}$, $\left|\overline{Z}\right| = |Z|$), d'où $\mathrm{OM}' = \dfrac{|z - 1|}{|z - 1|} = 1$ (car si $Z \in \mathbb{C}$, $|-Z| = |Z|$). M' appartient donc bien au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

4. Si $z \neq 1$, $\dfrac{z' - 1}{z - 1} = \dfrac{\frac{1 - z}{\overline{z} - 1} - 1}{z - 1} = \dfrac{\frac{1 - z - \overline{z} + 1}{\overline{z} - 1}}{z - 1} = \dfrac{2 - (z + \overline{z})}{(z - 1)(\overline{z} - 1)}$, d'où :
   $\dfrac{z' - 1}{z - 1} = \dfrac{2 - 2\,\mathfrak{Re}(z)}{(z - 1)(\overline{z - 1})} = \dfrac{2 - 2\,\mathfrak{Re}(z)}{|z - 1|^2} \in \mathbb{R}$.
   On en déduit que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}; \overrightarrow{\mathrm{AM}'}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z' - 1}{z - 1}\right) \equiv 0\,[\pi]$, ce qui prouve que les points A, M et M' sont alignés.

5. D'après ce qui précède, A, D et D' sont alignés et D' appartient à $\mathscr{C}$. D' est donc un des deux points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite (AD). Mais comme $\mathrm{D} \notin \Delta$, on a

$D' \neq A$ (Cf B.2.), d'où la construction de D' :