NOM : _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ TS2 – *05/02/2013*

Contrôle de Mathématiques

I On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} .$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)\mathrm{e}^x - 1$.
2. (a) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
   (c) Dresser le tableau de variations de g.
3. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis prouver que $-1 < \alpha < 0$.
   (b) On souhaite utiliser la méthode de dichotomie pour obtenir un encadrement de α d'amplitude 0,01. À cette fin, compléter l'algorithme suivant :

Initialisation	Le réel a prend la valeur de -1, Le réel b prend la valeur de 0,
Traitement	Tant que _ : | Si $g(a) \times g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant 0$, alors : | | _ _ _ _ _ _ prend la valeur de _ _ _ _ _ _ | Fin Si | Sinon : | | _ _ _ _ _ _ prend la valeur de _ _ _ _ _ _ | Fin Sinon Fin Tant que
Sortie	Afficher les valeurs de a et de b.

   (c) Grâce à la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.
   (d) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
4. (a) Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.
   (c) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{II}}$ Partie A : Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\overline{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z. On admet l'égalité : $|z|^2 = z\overline{z}$.

Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

Partie B : Étude d'une transformation particulière

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M$'$ d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{1-z}{\overline{z}-1}$.

1. Soit C le point d'affixe $z_{\text{C}} = -2 + \text{i}$.
   (a) Calculer l'affixe $z_{\text{C}'}$ du point C$'$ image de C par la transformation f, et placer les points C et C$'$ dans le repère ci-dessous.
   (b) Montrer que le point C$'$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
   (c) Montrer que les points A, C et C$'$ sont alignés.
2. Déterminer et représenter sur la figure ci-dessous l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.
3. Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M$'$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.
4. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.
   Que peut-on en déduire pour les points A, M et M$'$?
5. On a placé un point D sur la figure ci-dessous. Construire son image D$'$ par la transformation f.