$\boxed{\textbf{TS 2 – Correction du contrôle de Mathématiques n°4}}$

$\boxed{\mathbf{I}}$ **1)** On peut **conjecturer** le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

2) Si $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(2x) \leqslant 1$ donc $-3\cos(2x) \geqslant -3$ (car $-3 < 0$) d'où :
$2x^4 + 6x^2 + \frac{1}{4}x - 3\cos(2x) \geqslant 2x^4 + 6x^2 + \frac{1}{4}x - 3$, soit $f(x) \geqslant 2x^4 + 6x^2 + \frac{1}{4}x - 3$ $^{(\star)}$.
Or par produit, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^4) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(6x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}x\right) = +\infty$ d'où par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^4 + 6x^2 + \frac{1}{4}x - 3) = +\infty$, ce qui d'après $^{(\star)}$, permet de conclure (par comparaison) que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3)a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, produit et somme et :
$g(x) = f'(x) = 8x^3 + 12x + \frac{1}{4} + 6\sin(2x)$. Comme $\sin(2x) \leqslant 1$, on a $6\sin(2x) \leqslant 6$ (car $6 > 0$) donc $8x^3 + 12x + \frac{1}{4} + 6\sin(2x) \leqslant 8x^3 + 12x + \frac{25}{4}$, soit $g(x) \leqslant 8x^3 + 12x + \frac{25}{4}$ $^{(\natural)}$.
Or par produit, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}(8x^3) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(12x) = -\infty$. On déduit par somme que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(8x^3 + 12x + \frac{25}{4}\right) = -\infty$ et donc par comparaison [cf $^{(\natural)}$] que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

3)b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, produit et somme et $g'(x) = 24x^2 + 12 + 12\cos(2x)$.
Or $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, d'où $g'(x) = 24x^2 + 12 + 12(2\cos^2 x - 1) = 24x^2 + 24\cos^2 x$,
soit $g'(x) = 24(x^2 + \cos^2 x)$.

3)c)d)e) Pour tout réel x, on a donc $g'(x) > 0$ (car $x^2 + \cos^2 x$ est une somme de deux carrés jamais simultanément nuls), d'où :

x	$-\infty$		β		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
g		$-$	0	$+$	

La fonction g est continue (car dérivable, cf 3.b.) et strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$;
on a $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Or $0 \in]-\infty; +\infty[$ donc d'après le corollaire

du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution β dans $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.
La calculatrice fournit : $-0,02 < \beta < -0,01$.

4) On obtient donc :

x	$-\infty$		β		$+\infty$
$g = f'$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

Cela contredit la conjecture grossière faite avec la calculatrice.

$\boxed{\textbf{II}}$ 1)a) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme et pour tout réel x, $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$. On en déduit :

x	$-\infty$		-1		1	α		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$			$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0		$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	0	$\nearrow$	$+\infty$

((détails : $h(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) - 3 = -1$ et $h(1) = 1^3 - 3 \times 1 - 3 = -5$))

Si $x \neq 0$, on a $h(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$. Par produit et somme, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$ et comme $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$, on obtient par produit : $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$.
De même $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, on déduit par produit que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

1)b) • D'après son tableau des variations, la fonction h possède un maximum égal à -1 sur $]-\infty; 1]$. Par conséquent, pour tout $x \leqslant 1$, on a $h(x) \leqslant -1 < 0$, ce qui entraîne que l'équation $h(x) = 0$ ne possède aucune solution dans $]-\infty; 1]$.
• La fonction h est continue (car dérivable, cf 1.a.) et strictement croissante sur $]1; +\infty[$;

on a : $h(1) = -5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. Or $0 \in]-5;+\infty[$, donc d'après le corollaire du T.V.I., l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution α dans $]1;+\infty[$.

• Bilan : l'équation $h(x) = 0$ possède pour unique solution α dans $\mathbb{R}$.

La calculatrice fournit : $2,1 < \alpha < 2,11$.

1)c) On déduit du tableau des variations de h (complété, cf 1.a.) :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
h		$-$	0	$+$	

2)a) $x \overset{u}{\mapsto} x^3 - 7x - 21$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme et $x \overset{v}{\mapsto} \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, par conséquent $f = uv$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ de dérivée $f' = u'v + uv'$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $f'(x) = (3x^2 - 7)\sqrt{x} + (x^3 - 7x - 21) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, soit :

$f'(x) = \dfrac{2(3x^2-7)\sqrt{x}^2 + x^3 - 7x - 21}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2x(3x^2-7) + x^3 - 7x - 21}{2\sqrt{x}}$ et finalement :

$f'(x) = \dfrac{6x^3 - 14x + x^3 - 7x - 21}{2\sqrt{x}} = \dfrac{7x^3 - 21x - 21}{2\sqrt{x}} = \dfrac{7h(x)}{2\sqrt{x}}$.

2)b) Comme $7 > 0$ et $2\sqrt{x} > 0$ lorsque $x > 0$, on déduit que f' est du signe de h sur $]0;+\infty[$.

D'où, d'après 1.c. :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

((détail : $f(0) = (0^3 - 7\times 0 - 21) \times \sqrt{0} = 0$))

Si $x \neq 0$, on a $x^3 - 7x - 21 = x^3\left(1 - \frac{7}{x^2} - \frac{21}{x^3}\right)$. Par produit et somme, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{7}{x^2} - \frac{21}{x^3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, on obtient par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 - 7x - 21) = +\infty$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$, d'où par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2)c) On a $h(\alpha) = 0$ donc $\alpha^2 - 3\alpha - 3 = 0$, soit $\alpha^3 = 3\alpha + 3$.

Or $f(\alpha) = (\alpha^3 - 7\alpha - 21)\sqrt{\alpha}$, donc $f(\alpha) = (3\alpha + 3 - 7\alpha - 21)\sqrt{\alpha}$, soit :

$f(\alpha) = (-4\alpha - 18)\sqrt{\alpha} = -2(2\alpha + 9)\sqrt{\alpha}$.

D'après son tableau des variations (cf 2.b.), f possède donc bien un minimum égal à $-2(2\alpha + 9)\sqrt{\alpha}$ sur $[0;+\infty[$.