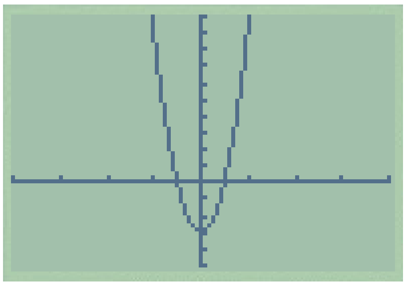
TS 2 – Contrôle de Mathématiques n°4

I Le but de l'exercice est d'étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^4 + 6x^2 + \frac{1}{4}x - 3\cos(2x) \ .$$

On a reproduit ci-dessous l'écran d'une calculatrice sur laquelle on a tracé le graphe de la fonction f :



1. À partir de la capture d'écran ci-dessus, conjecturer le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On admettra que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
3. On note g la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
   (a) Prouver que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$. On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
   (b) Montrer[(⋆)] que $g'(x) = 24(x^2 + \cos^2 x)$.
   (c) Dresser le tableau des variations de g sur $\mathbb{R}$.
   (d) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution β dans $\mathbb{R}$ puis, en utilisant la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de β.
   (e) En déduire le tableau des signes de g sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$. Comparer avec la conjecture faite à la question 1).

[(⋆)]Cadeau : on rappelle que $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

$\boxed{\textbf{II}}$ Le but de l'exercice est d'étudier les variations de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x^3 - 7x - 21)\sqrt{x}\ .$$

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - 3x - 3$.
   (a) Dresser le tableau des variations de h sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   À l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   (c) En déduire le tableau des signes de h sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Établir que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{7h(x)}{2\sqrt{x}}$.
   (b) Dresser alors le tableau des variations de f sur $[0; +\infty[$.
   (c) Montrer que f possède un minimum sur $[0; +\infty[$, égal à $-2(2\alpha + 9)\sqrt{\alpha}$.