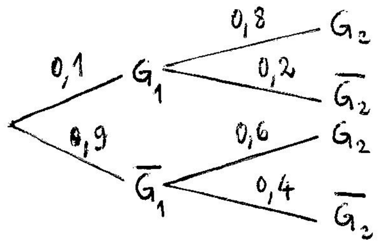
TS 2 — Correction du contrôle de mathématiques n° 3

I 1)



D'après la formule des probabilités totales :

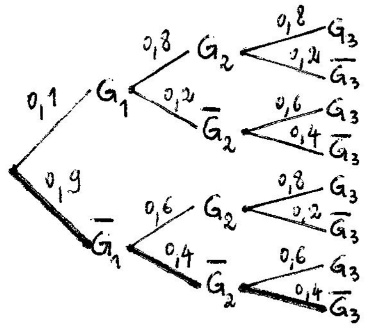
$p_2 = p(G_2) = p(G_2 \cap G_1) + p(G_2 \cap \overline{G_1})$, d'où

$p_2 = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p(\overline{G_1}) \times p_{\overline{G_1}}(G_2)$

$= 0{,}1 \times 0{,}8 + 0{,}9 \times 0{,}6 = 0{,}62$

2) Il s'agit de calculer la probabilité que le joueur ait perdu la première partie, sachant qu'il a gagné la deuxième : $p_{G_2}(\overline{G_1}) = \dfrac{p(G_2 \cap \overline{G_1})}{p(G_2)} = \dfrac{0{,}9 \times 0{,}6}{0{,}62} = \dfrac{27}{31}$

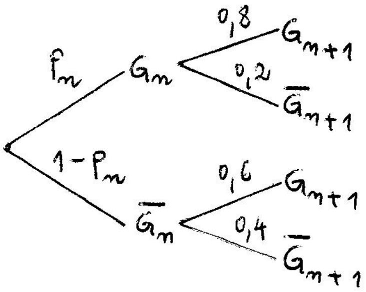
3)



L'événement contraire de : « gagner au moins une partie sur les trois premières » est « ne gagner aucune partie sur les trois premières », soit $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}$. La probabilité cherchée est donc :

$1 - p(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}) = 1 - 0{,}9 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}856$

4)



a) $p_{G_n}(G_{n+1})$ [resp. $p_{\overline{G_n}}(G_{n+1})$] est la probabilité que le joueur ait gagné la $(n+1)$-ième partie, sachant qu'il a gagné [resp. perdu] la partie précédente. D'où $p_{G_n}(G_{n+1}) = 0{,}8$ et $p_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) = 0{,}6$.

4) b) On a $p(\overline{G_n}) = 1 - p(G_n) = 1 - p_n$

4) c) D'après la formule des probabilités totales (voir également l'arbre précédent) :

$p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p(G_{n+1} \cap G_n) + p(G_{n+1} \cap \overline{G_n}) = p(G_n) \times p_{G_n}(G_{n+1}) + p(\overline{G_n}) \times p_{\overline{G_n}}(G_{n+1})$,

d'où $p_{n+1} = p_n \times 0{,}8 + (1 - p_n) \times 0{,}6 = 0{,}6 + 0{,}2\, p_n = \dfrac{1}{5} p_n + \dfrac{3}{5}$

5) Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}(n)$ la proposition : $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

- On a $\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{20} = \dfrac{15}{20} - \dfrac{13}{20} = \dfrac{2}{20} = 0{,}1 = p_1$ donc $\mathcal{S}(1)$ est vraie.
- Supposons que $\mathcal{S}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$: on a $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

donc $p_{n+1} = \dfrac{1}{5} p_n + \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{5}\left[\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right] + \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{20} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1} + \dfrac{12}{20} = \dfrac{15}{20} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$,

soit $p_{n+1} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$, ce qui prouve que $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie.

- Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

6) Comme $\dfrac{1}{5} \in]-1;1[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$, d'où par produit et somme :

$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4} \times 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{3}{4}$

$\boxed{\text{II}}$ 1) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2-1}$ n'est défini que lorsque $x^2 \neq 1$, c'est-à-dire si $x \notin \{-1;1\}$.
L'ensemble de définition de f est donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

2) • On a $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-1} = \dfrac{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$ (lorsque $x \neq 0$)

Par somme, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right) = 1-0+0 = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 1-0 = 1$.

De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right) = 1-0+0 = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 1-0 = 1$.

On déduit par quotient que $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1.}$

$\hookrightarrow$ La droite d'équation $y=1$ est donc asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

• On a $x^2-1 = (x-1)(x+1)$, d'où :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

- On a $\lim\limits_{x \to -1} (x-2)^2 = (-1-2)^2 = 9$.

D'autre part (voir tableau de signes) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (x^2-1) = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (x^2-1) = 0^-$

d'où par quotient, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty}$

- On a $\lim\limits_{x \to 1} (x-2)^2 = (1-2)^2 = 1$.

D'autre part (voir tableau de signes) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (x^2-1) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^2-1) = 0^+$

d'où par quotient, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty}$

$\hookrightarrow$ Les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$ sont donc asymptotes à $\mathcal{C}_f$.

3) Si $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = w(x)^2$, où $w(x) = x-2$ et $v(x) = x^2-1$. On a $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ et $u'(x) = 2w'(x)w(x) = 2 \times 1 \times (x-2)$

d'où $f'(x) = \dfrac{2(x-2)(x^2-1) - (x-2)^2 \times 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{(x-2)\left[2(x^2-1) - 2x(x-2)\right]}{(x^2-1)^2}$,

soit $f'(x) = \dfrac{(x-2)(2x^2-2-2x^2+4x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{(x-2)(4x-2)}{(x^2-1)^2}$

4) Si $x \in \mathcal{D}$, $(x^2-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(x-2)(4x-2)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$x-2$			$-$		0	$+$	
$4x-2$		$-$	0		$+$		
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x-2=0 \iff x=2$

$4x-2=0 \iff 4x=2 \iff x=\frac{1}{2}$

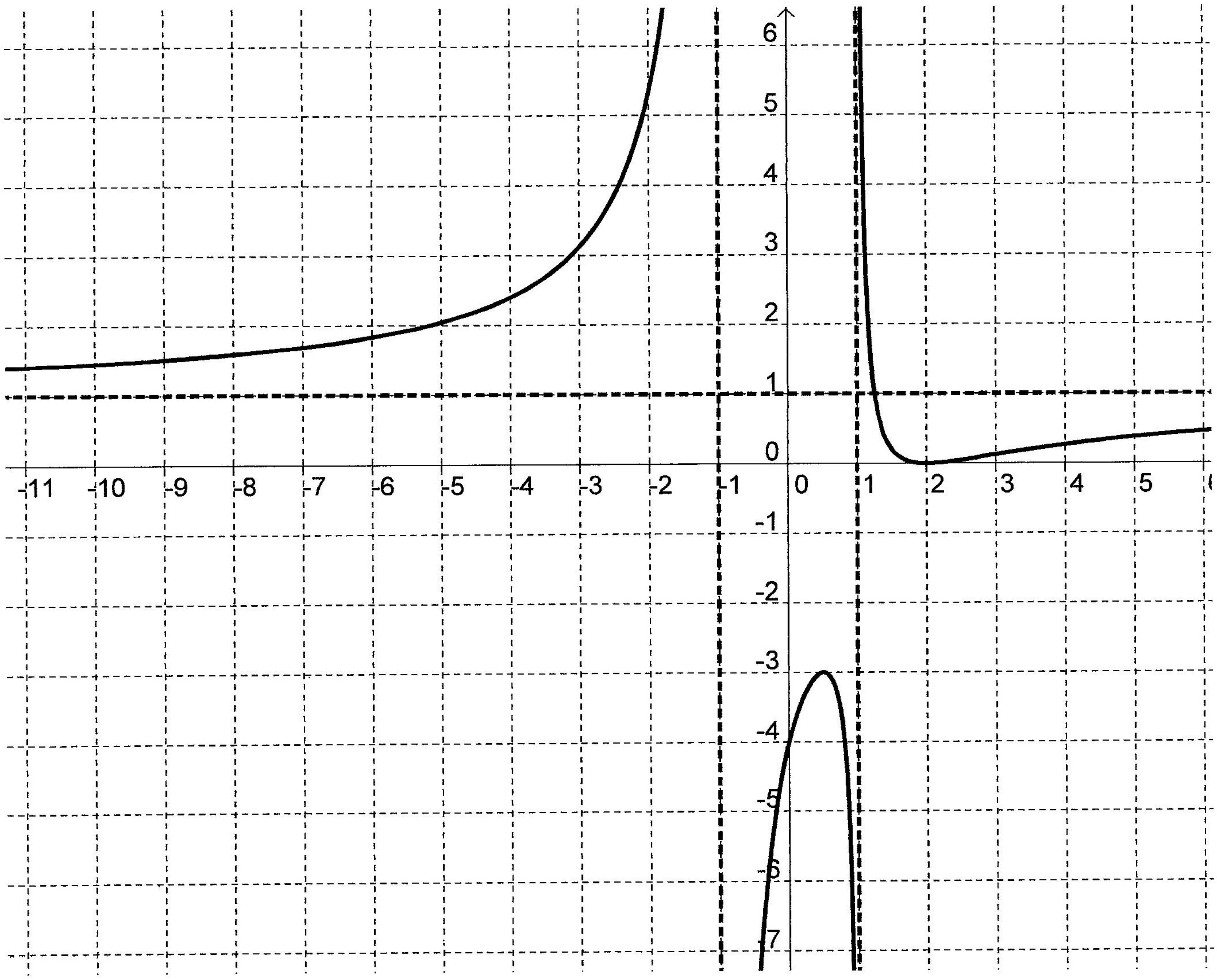
D'où l'on déduit finalement :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

• Détails : $f(2) = \dfrac{(2-2)^2}{2^2-1} = \dfrac{0}{3} = 0$

et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}-2\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = \dfrac{\frac{9}{4}}{-\frac{3}{4}} = -3$

Voici, à titre de curiosité, l'allure du graphe de f :



(en pointillés gras, les asymptotes)

$\boxed{\text{III}}$ 1) a) B_1 est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse π donc $y_{B_1} = f(\pi) = \left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\cos 2\pi}_{1} - \underbrace{\sin 2\pi}_{0}$,
soit $y_{B_1} = 2\pi - \frac{\pi}{2} = 2x_{B_1} - \frac{\pi}{2}$, d'où $B_1 \in \Delta$.

1) b) B_k est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $k\pi$ donc $y_{B_k} = f(k\pi) = \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\cos(2k\pi)}_{1} - \underbrace{\sin(2k\pi)}_{0}$,
soit $y_{B_k} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} = 2x_{B_k} - \frac{\pi}{2}$, d'où $B_k \in \Delta$

2) b) On peut conjecturer :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
f	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$

2) a) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(2\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$

3) a) On a $f(x) = u(x)v(x) - w(x)$ avec $u(x) = \left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$, $v(x) = \cos(2x)$ et $w(x) = \sin(2x)$.
Or $u'(x) = 2$, $v'(x) = -2\sin(2x)$ et $w'(x) = 2\cos(2x)$, donc :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - w'(x)$$
$$= 2\cos(2x) + \left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\left(-2\sin(2x)\right) - 2\cos(2x) = (\pi - 4x)\sin(2x)$$

3) b)

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\pi - 4x$		$+$	0		$-$		
$2x$	0		$\frac{\pi}{2}$		π		2π
$\sin(2x)$	0		$+$		0	$-$	0
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

$f'(x) = (\pi - 4x)\sin(2x)$

Le signe de $f'(x)$ valide le tableau des variations de f conjecturé au 2)