TS 2 – Contrôle de Mathématiques n°3

I Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

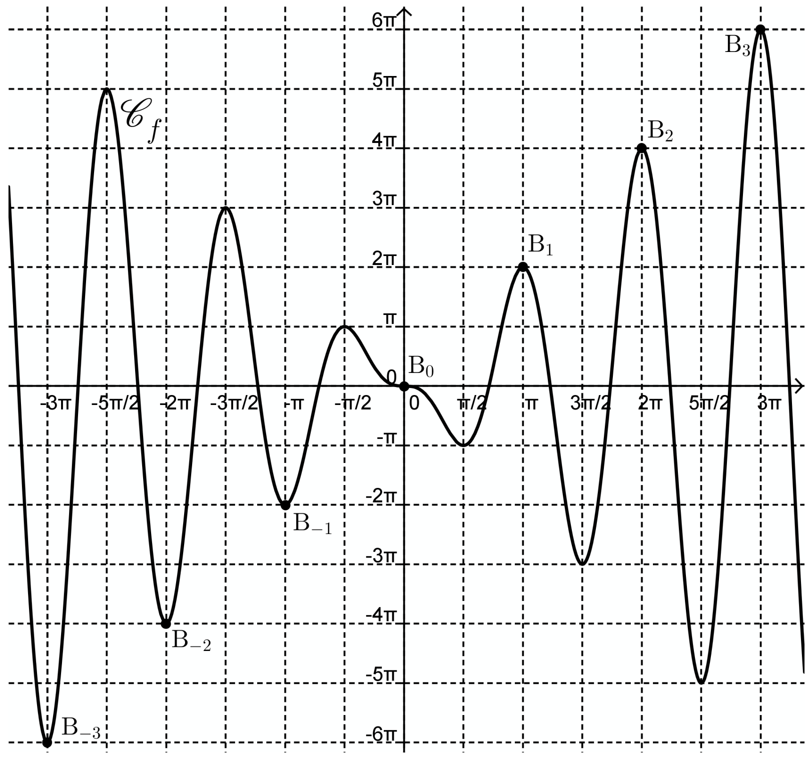
1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. (a) Indiquer ce que représentent $p_{\mathrm{G}_n}(\mathrm{G}_{n+1})$ et $p_{\overline{\mathrm{G}_n}}(\mathrm{G}_{n+1})$ puis donner leur valeur.
   (b) Exprimer $p\left(\overline{\mathrm{G}}_n\right)$ en fonction de p_n.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.
5. Montrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul , $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

II Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2-1}$.

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f ?
2. Étudier les limites aux bornes de $\mathscr{D}$. En déduire que $\mathscr{C}_f$ possède des asymptotes (dont on précisera les équations).
3. Prouver que pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f'(x) = \dfrac{(x-2)(4x-2)}{(x^2-1)^2}$.
4. Dresser le tableau des variations de f.

III On a représenté ci-dessous un morceau du graphe $\mathscr{C}_f$ de la fonction :

$$f : x \mapsto 2x\cos(2x) - \sin(2x) \ .$$



Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note B_k le point de coordonnées $(k\pi; 2k\pi)$.

1. (a) Montrer que $B_1 \in \mathscr{C}_f$.

   (b) Plus généralement, prouver que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $B_k \in \mathscr{C}_f$.

2. Conjecturer le tableau des variations de f sur $[-\pi; \pi]$.

3. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4x\sin(2x)$.

   (b) Valider alors rigoureusement la conjecture faite au 2).