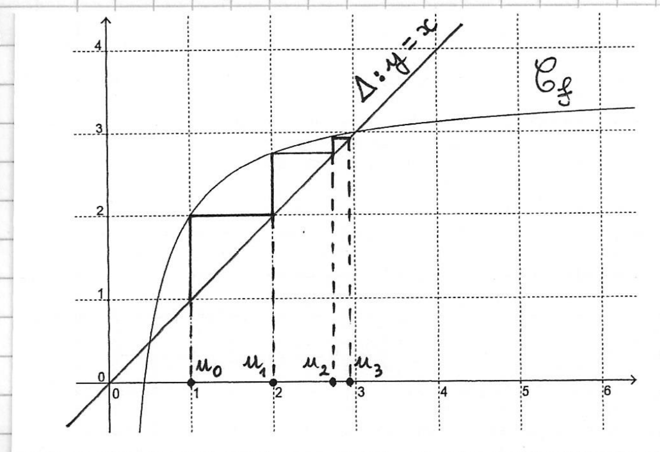
TS1 — Correction du contrôle de mathématiques n° : 2 — 2013/2014

I 1) a) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{7x-3}{2x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ par produit, somme et quotient et $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{7\times 2x - 2(7x-3)}{(2x)^2} = \dfrac{6}{4x^2} = \dfrac{3}{2x^2} > 0$. f est donc croissante sur $]0;+\infty[$.

1)b) Soit $x>0$; $f(x) = x \iff \dfrac{7x-3}{2x} = x \overset{(x\neq 0)}{\iff} 7x-3 = 2x^2 \iff 2x^2-7x+3=0$, équation du second degré classique dont les solutions sont $x_1 = 0,5$ et $x_2 = 3$ (Vérifier que $\Delta = 25 > 0$ etc.)
$\mathcal{C}_f$ et la droite $\Delta : y = x$ se coupent donc en $A(0,5 ; 0,5)$ et $B(3;3)$.

2) a)



2)b) La suite (u_n) semble croissante et converger vers 3.

3) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_n \in [1;3]$.

- On a $u_0 = 1 \in [1;3]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $u_n \in [1;3]$ c'est-à-dire $1 \leq u_n \leq 3$, d'où par croissance de la fonction f sur $]0;+\infty[$ (établie au 1)a)), $f(1) \leq f(u_n) \leq f(3)$ soit : $2 \leq u_{n+1} \leq 3$ d'où $1 \leq u_{n+1} \leq 3$ (car $2 \geq 1$) soit $u_{n+1} \in [1;3]$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1;3]$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{7u_n - 3}{2u_n} - u_n = \dfrac{7u_n - 3 - 2u_n^2}{2u_n} = \dfrac{-u_n^2 + \frac{7}{2}u_n - \frac{3}{2}}{u_n}$

Or $\left(u_n - \frac{1}{2}\right)(3 - u_n) = 3u_n - u_n^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}u_n = -u_n^2 + \frac{7}{2}u_n - \frac{3}{2}$, d'où $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\left(u_n - \frac{1}{2}\right)(3-u_n)}{u_n}$.

- On a $u_n \in [1;3]$, d'où $u_n \geq 1 \geq \frac{1}{2}$ donc $u_n - \frac{1}{2} \geq 0$. D'autre part $u_n \leq 3$ donc $3 - u_n \geq 0$.

On en déduit que $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Cela prouve la croissance de la suite (u_n).

5) a) Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $w_{n+1} = 3 - u_{n+1} = 3 - \dfrac{7u_n - 3}{2u_n} = \dfrac{6u_n - 7u_n + 3}{2u_n} = \dfrac{3 - u_n}{2u_n} = \dfrac{w_n}{2u_n}$.

5) b) Notons que $u_n \leq 3$ donc $w_n = 3 - u_n \geq 0$.
On a $u_n \geq 1$ donc par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$: $\dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{1} = 1$. Or $2 \geq 0$ et $w_n \geq 0$ donc $\dfrac{w_n}{2} \times \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{w_n}{2} \times 1$, soit : $\dfrac{w_n}{2u_n} \leq \dfrac{1}{2} w_n$, ou encore $w_{n+1} \leq \frac{1}{2} w_n$.

5)c) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $w_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

- On a $w_0 = 3 - u_0 = 3 - 1 = 2$ et $\dfrac{1}{2^{0-1}} = \dfrac{1}{2^{-1}} = 2$ donc la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $w_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Comme $\frac{1}{2} \geq 0$, on en déduit que $\frac{1}{2} w_n \leq \frac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^{n-1}}$, soit $\frac{1}{2} w_n \leq \dfrac{1}{2^n}$.

Or d'après 5)b), on a $w_{n+1} \leq \frac{1}{2} w_n$, ce qui permet de conclure que $w_{n+1} \leq \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n+1-1}}$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

5)d) D'après les questions précédentes, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \underbrace{3 - u_n}_{w_n} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ d'où $u_n \leq 3$ et $3 - \dfrac{1}{2^{n-1}} \leq u_n$ et finalement :

$$3 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq u_n \leq 3 \quad (*)$$

Or $\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^n} = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\frac{1}{2}\in]-1;1[$ donc par produit et somme : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=3-2\times 0=3$.

Le théorème des gendarmes appliqué à l'inégalité (*) prouve alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

$\boxed{\text{II}}$ 1) On a $u_n = 2n^2 - 4\times\frac{1}{\sqrt{n}} - 100$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ donc par produit et somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-4\times\frac{1}{\sqrt{n}}-100\right) = -4\times 0-100=-100$

D'autre part, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2=+\infty$ et finalement par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

2) Si $n>0$, on a $u_n = n^4(5-4n)$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ donc par produit et somme,

$\lim\limits_{n\to+\infty}(5-4n)=-\infty$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4=+\infty$, on déduit par produit que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

3) Si $n>0$, on a $u_n = \dfrac{3n-n^4}{n^3+n+1} = \dfrac{\frac{3n-n^4}{n^3}}{\frac{n^3+n+1}{n^3}} = \dfrac{3\times\frac{1}{n^2}-n}{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$.

Par produit, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3\times\frac{1}{n^2}\right)=3\times 0=0$.
et (encore par produit) $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n)=-\infty$.
d'où par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3\times\frac{1}{n^2}-n\right)=-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)=1+0+0=1$

d'où par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$

4) Si $n>0$, on a $u_n = \dfrac{\frac{n-\sqrt{n}}{n}}{\frac{n^2+1}{n}} = \dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{n+\frac{1}{n}}$.

On a par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1-0=1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$
d'où par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n+\frac{1}{n}\right)=+\infty$

d'où par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

5) Soit $n>0$; on a $-1\leq(-1)^n\leq 1$ donc $n^2-1\leq n^2+(-1)^n\leq n^2+1$ et comme $n^2+n>0$, on en déduit que $\dfrac{n^2-1}{n^2+n}\leq\dfrac{n^2+(-1)^n}{n^2+n}\leq\dfrac{n^2+1}{n^2+n}$ (4)

On a $\dfrac{n^2-1}{n^2+n}=\dfrac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}$ donc par produit, somme et quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-1}{n^2+n}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$

On a $\dfrac{n^2+1}{n^2+n}=\dfrac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}$ donc par somme et quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2+n}=\dfrac{1+0}{1+0}=1$

Le théorème des gendarmes appliqué à l'inégalité (4) prouve alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

$\boxed{\text{III}}$ **1)** $w : x \mapsto x - x^2$ est dérivable (par somme) et strictement positive sur $]0;1[$ (faire un tableau de signes...) donc $v = \sqrt{w}$ est dérivable sur $]0;1[$ et $v'(x) = \dfrac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}} = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$.

On a $f = uv$ avec $u : x \mapsto x - 1$ et $v : x \mapsto \sqrt{x-x^2}$ donc f est dérivable par produit sur $]0;1[$ avec $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, soit $f'(x) = 1 \times \sqrt{x-x^2} + (x-1)\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} =$
$\dfrac{2\sqrt{x-x^2}^2 + (x-1)(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}} = \dfrac{2(x-x^2) + x - 2x^2 - 1 + 2x}{2\sqrt{x-x^2}} = \dfrac{-4x^2+5x-1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

2) Si $x \in]0;1[$, on a $2\sqrt{x-x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe du trinôme $-4x^2+5x-1$. Celui-ci possède les deux racines distinctes 1 et $\frac{1}{4}$ (calculer le discriminant etc.) et :

x	0		$\frac{1}{4}$		1
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$
f	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\nearrow$	0

Détails : $f(0) = (0-1)\sqrt{0-0^2} = 0$; $f(1) = (1-1)\sqrt{1-1^2} = 0$ et
$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4} - 1\right)\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} = -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{16}} = -\frac{3\sqrt{3}}{16}$.